

لتكن المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$u_0 = 3 \quad \text{و} \quad u_{n+1} = 2 + \frac{2}{u_n} - \frac{2}{u_n^2} \quad \text{لكل } n \text{ من } \mathbb{N}.$$

(1) بين أن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ مصغرة بالعدد 2.

$$(2) \text{ أ. تحقق من أن لكل } x \text{ من } \mathbb{R} : -x^3 + 2x^2 + x - 2 = (2-x)(x^2-1).$$

ب. بين أن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تناقصية.

ج. استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة.

$$(3) \text{ أ. بين أن لكل } n \text{ من } \mathbb{N} : (u_{n+1} - 2) \leq \frac{1}{4} (u_n - 2).$$

$$\text{ب. استنتج أن لكل } n \text{ من } \mathbb{N} : (u_n - 2) \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

(4) احسب نهاية المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.