

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بـ :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{2 + 3 U_n^2}{1 + 3 U_n} ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1-أ- بين أن لكل n من $\mathbb{N}$: $2 - U_{n+1} = \frac{3 U_n}{1 + 3 U_n} (2 - U_n)$

(0,25 ن)

ب- بين بالترجع أن لكل n من $\mathbb{N}$: $0 < u_n < 2$. (1 ن)

ج- بين أن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تزايدية ، واستنتج أنها متقاربة .

(0,75 ن)

2-أ- بين أن لكل n من $\mathbb{N}$: $\frac{3 U_n}{1 + 3 U_n} < \frac{6}{7}$

(يمكن استعمال المتساوية $\frac{3 U_n}{1 + 3 U_n} = 1 - \frac{1}{1 + 3 U_n}$) . (0,5 ن)

ب- استنتج من 1-أ- و 2-أ- أن لكل n من $\mathbb{N}$:

$$2 - U_n \leq \left(\frac{6}{7}\right)^n \quad (1 \text{ ن})$$

ج- احسب نهاية (U_n) . (0,5 ن)