

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بمايلي :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2 + 3u_n^2}{1 + 3u_n} \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}$$

(1) أ- بين أن لكل n من $\mathbb{N}$:

$$2 - u_{n+1} = \frac{3u_n}{1 + 3u_n} (2 - u_n)$$

ب- بين بالترجع أن لكل n من $\mathbb{N}$: $0 < u_n < 2$.

ج- بين أن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تزايدية، واستنتج أنها متقاربة.

$$(2) \quad \text{أ- بين أن لكل } n \text{ من } \mathbb{N} : \frac{3u_n}{1 + 3u_n} < \frac{6}{7}$$

$$\left(\frac{3u_n}{1 + 3u_n} = 1 - \frac{1}{1 + 3u_n} \right) \quad \text{(يمكن استعمال المتساوية)}$$

ب- استنتج من (1) أ- و (2) أ- أن لكل n من $\mathbb{N}$:

$$2 - u_n < \left(\frac{6}{7} \right)^n$$

ج- احسب نهاية u_n .