

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $[0, 2]$ ب : $g(x) = \sqrt[3]{-x^2 + 2x}$

والمتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة ب :
$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = \sqrt[3]{-u_n^2 + 2u_n} \end{cases} \quad \text{حيث } 0 \leq a \leq 1$$

(1) أ - احسب $g'(x)$ لكل x من $[0, 2]$ وضع جدول تغيرات الدالة g .

ب - استنتج أن لكل x من $[0, 2]$ $0 \leq g(x) \leq 1$.

(2) بين أنه إذا كان $a = 0$ أو $a = 1$ فإن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ثابتة.

(3) نفترض فيما يلي أن $0 < a < 1$.

أ - بين أن لكل n من $\mathbb{N}$: $0 < u_n < 1$.

ب - ادرس رتبة المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ واستنتج أنها متقاربة.

ج - احسب النهاية : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.