

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :
$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} \end{cases} \quad n \geq 0$$
 حيث $(a \in \mathbb{R})$

I - نفترض أن $0 < a < 1$.

(1) اعط جدول تغيرات الدالة f المعرفة على $I = [0, +\infty[$ ب $f(x) = \sqrt{x}$ واستنتج أن $f(I) \subset I$.

(2) بين أن $0 < u_n < 1$ لكل n من $\mathbb{N}$.

(3) بين أن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تزايدية واستنتج أن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة.

(4) بين أن $\lim u_n = 1$.

II - نفترض أن $a > 1$.

(1) بين أن $u_n > 1$ لكل n من $\mathbb{N}$.

(2) ادرس رتبة $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ واستنتج أنها متقاربة.

(3) باستعمال العلاقة $u_n - 1 = (\sqrt{u_n} - 1)(\sqrt{u_n} + 1)$ بين أن $0 < u_{n+1} - 1 < \frac{1}{2}(u_n - 1)$ لكل n من $\mathbb{N}$.

(4) استنتج أن $|u_n - 1| \leq \frac{1}{2^n} |a - 1|$ لكل n من $\mathbb{N}$ ، واحسب $\lim u_n$.