

حل التمرين 1

(أ) نبسط ونحسب مايلي:

$$A = 5\sqrt{18} + 3\sqrt{50} - \sqrt{72} \quad \text{لدينا:}$$

$$A = 5\sqrt{9 \times 2} + 3\sqrt{25 \times 2} - \sqrt{36 \times 2} \quad \text{تعني أن:}$$

$$A = (5 \times 3\sqrt{2}) + (3 \times 5\sqrt{2}) - (6\sqrt{2}) \quad \text{تعني أن:}$$

$$A = (15 + 15 - 6)\sqrt{2} \quad \text{تعني أن:}$$

$$A = 24\sqrt{2}$$

$$B = (\sqrt{5 - 2\sqrt{6}} + \sqrt{5 + 2\sqrt{6}})^2 \quad \text{لدينا:}$$

$$x = \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}, Y = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}} \quad \text{نضع:}$$

$$x^2 = 5 - 2\sqrt{6} \quad y^2 = 5 + 2\sqrt{6} \quad \text{لدينا:}$$

$$xy = \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} \cdot \sqrt{5 + 2\sqrt{6}} \quad \text{و:}$$

$$xy = \sqrt{(5 - 2\sqrt{6})(5 + 2\sqrt{6})} \quad \text{تعني أن:}$$

$$xy = \sqrt{5^2 - (2\sqrt{6})^2} \quad \text{تعني أن:}$$

$$xy = \sqrt{25 - 24} = \sqrt{1} \quad \text{تعني أن:}$$

$$xy = 1$$

أي أن:

$$B = (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \quad \text{وبالتالي لدينا:}$$

$$B = 5 - 2\sqrt{6} + 2 + 5 + 2\sqrt{6} \quad \text{أي أن:}$$

$$B = 12$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{3}-1} + \frac{1}{\sqrt{3}+1} - \frac{3}{2\sqrt{3}} \quad \text{لدينا:}$$

$$C = \frac{\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} + \frac{\sqrt{3}-1}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} - \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}^2}$$

$$C = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}^2-1^2} + \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}^2-1^2} - \frac{\cancel{3}\sqrt{3}}{2 \times \cancel{3}}$$

$$C = \frac{\sqrt{3}+1}{3-1} + \frac{\sqrt{3}-1}{3-1} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$C = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$C = \frac{\sqrt{3} + \cancel{1} + \sqrt{3} - 1 - \sqrt{3}}{2}$$

$$C = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$D = \sqrt{8 + \sqrt{15}} - \sqrt{8 - \sqrt{15}} \quad \text{لدينا:}$$

(1) نحسب D^2 :

$$D^2 = (\sqrt{8 + \sqrt{15}} - \sqrt{8 - \sqrt{15}})^2$$

$$D^2 = 8 + \cancel{\sqrt{15}} - 2\sqrt{(8 + \sqrt{15})(8 - \sqrt{15})} + 8 - \sqrt{15}$$

$$D^2 = 8 + 8 - 2\sqrt{8^2 - (\sqrt{15})^2}$$

$$D^2 = 8 + 8 - 2\sqrt{64 - 15}$$

$$D^2 = 16 - 2 \times 7 \quad \text{أي: } D^2 = 16 - 2\sqrt{49}$$

$$\boxed{D^2=2} \quad \text{أي: } D^2 = 16 - 14$$

* ربما أن $8 + \sqrt{15} > 8 - \sqrt{15}$ فإن:

$$\sqrt{8 + \sqrt{15}} > \sqrt{8 - \sqrt{15}}$$

أي أن العدد D موجب

$$\boxed{D = \sqrt{2}} \quad \text{إذن: } D^2=2 \text{ تعني أن}$$

$$E = 8^7 \times 9^{-9} \times (1,5)^{21} \quad \text{لدينا:}$$

$$E = 8^7 \times \frac{1}{9^9} \times \left(\frac{15}{10}\right)^{21} \quad \text{تعني أن:}$$

$$E = \frac{8^7}{9^9} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{21} \quad \text{تعني أن:}$$

ونعلم أن: $8 = 2^3$ و أن: $9 = 3^2$ إذن لدينا:

$$E = \frac{(2^3)^7}{(3^2)^9} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{21}$$

$$E = \frac{2^{21}}{3^{18}} \times \frac{3^{21}}{2^{18}} = \frac{1}{1} \times \frac{3^3}{1}$$

$$\boxed{E=27} \quad \text{أي أن:}$$

(ب) نبين أن: $m^2 + mn + n^2$ هو عدد صحيح طبيعي:

$$m = \sqrt{5} + 2 \text{ و } n = \sqrt{5} - 2 \quad \text{لدينا:}$$

$$m^2 = (\sqrt{5} + 2)^2 = \sqrt{5}^2 + 4\sqrt{5} + 2^2 \quad \text{إذن:}$$

$$m^2 = 5 + 4\sqrt{5} + 4 = 9 + 4\sqrt{5}$$

$$n^2 = (\sqrt{5} - 2)^2 = \sqrt{5}^2 - 4\sqrt{5} + 2^2$$

$$n^2 = 5 - 4\sqrt{5} + 4 = 9 - 4\sqrt{5}$$

$$m.n = (\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2) = \sqrt{5}^2 - 2^2$$

تعني أن : $m.n = 5-4$ أي $m.n = 1$ وبالتالي لدينا:

$$m^2 + mn + n^2 = 9 + 4\sqrt{5} + 1 + 9 - 4\sqrt{5}$$

$$m^2 + mn + n^2 = 19$$
 أي أن :

إذن العدد $m^2 + mn + n^2$ هو عدد صحيح طبيعي.
(ع) نبين أن:

$$\sqrt{18 - \sqrt{8}} = \sqrt{9 + \sqrt{79}} - \sqrt{9 - \sqrt{79}}$$

$$(\sqrt{18 - \sqrt{8}})^2 = 18 - \sqrt{8}$$
 لدينا :

$$(\sqrt{9 + \sqrt{79}} - \sqrt{9 - \sqrt{79}})^2 = 9 + \sqrt{79} +$$

$$- 2\sqrt{(9 + \sqrt{79})(9 - \sqrt{79})} + 9 - \sqrt{79}$$

$$(\sqrt{9 + \sqrt{79}} - \sqrt{9 - \sqrt{79}})^2 = 18 - 2\sqrt{81 - 79}$$

$$(\sqrt{9 + \sqrt{79}} - \sqrt{9 - \sqrt{79}})^2 = 18 - 2\sqrt{2}$$

$$2\sqrt{2} = \sqrt{8} \quad \text{وبما أن :}$$

$$(\sqrt{9 + \sqrt{79}} - \sqrt{9 - \sqrt{79}})^2 = 18 - \sqrt{8}$$

وبالتالي بما أن : $\sqrt{9 + \sqrt{79}} > \sqrt{9 - \sqrt{79}}$

فإن : $\sqrt{9 + \sqrt{79}} - \sqrt{9 - \sqrt{79}}$ موجب

إذن العدد الحقيقي : $\sqrt{9 + \sqrt{79}} - \sqrt{9 - \sqrt{79}}$ هو عدد

موجب وكذلك العدد الحقيقي $\sqrt{18 - \sqrt{8}}$ هو عدد موجب

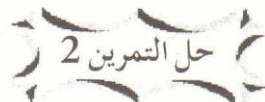
$$(\sqrt{18 - \sqrt{8}})^2 = 18 - \sqrt{8}$$
 إذن بما أن :

$$(\sqrt{9 + \sqrt{79}} - \sqrt{9 - \sqrt{79}})^2 = 18 - \sqrt{8}$$

وأن العددين : $\sqrt{9 + \sqrt{79}} - \sqrt{9 - \sqrt{79}}$ و $\sqrt{18 - \sqrt{8}}$

موجبان

$$18 - \sqrt{8} = \sqrt{9 + \sqrt{79}} - \sqrt{9 - \sqrt{79}}$$
 فإن :



نحل المعادلات التالية:

$$3(x - 5) + 4x = -1 + 7(x - 2)$$

لدينا :

$$3x - 15 + 4x = -1 + 7x - 14$$

تعني :

$$7x - 15 = 7x - 15$$

تعني :

$$7x - 7x = 15 - 15 \quad \text{تعني:}$$

$$0x = 0 \quad \text{أي:}$$

وهذا صحيح مهما يكن العدد الحقيقي x .

إذن كل عدد حقيقي x هو حل للمعادلة:

$$3(x - 5) + 4x = -1 + 7(x - 2)$$

$$\sqrt{2} \cdot x - 1 = x + \sqrt{2} \quad \text{*لدينا:}$$

$$\sqrt{2} \cdot x - x = \sqrt{2} + 1 \quad \text{تعني أن:}$$

$$(\sqrt{2} - 1)x = \sqrt{2} + 1 \quad \text{تعني أن:}$$

$$x = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} \quad \text{تعني أن:}$$

$$x = \frac{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} \quad \text{تعني أن:}$$

$$x = \frac{(\sqrt{2} + 1)^2}{\sqrt{2}^2 - 1^2} = \frac{2 + 2\sqrt{2} + 1}{2 - 1}$$

$$x = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{1} \quad \text{أي:}$$

$$\boxed{x = 3 + 2\sqrt{2}} \quad \text{أي:}$$

إذن العدد الحقيقي $3 + 2\sqrt{2}$ هو حل هذه المعادلة

$$4x^2 + 4\sqrt{3}x + 3 = 0 \quad \text{*لدينا:}$$

$$(2x)^2 + 2(2\sqrt{3}x) + \sqrt{3}^2 = 0 \quad \text{تعني أن:}$$

$$(2x + \sqrt{3})^2 = 0 \quad \text{تعني أن:}$$

$$2x = -\sqrt{3} \quad \text{أي } 2x + \sqrt{3} = 0 \quad \text{إذن:}$$

$$\boxed{x = \frac{-\sqrt{3}}{2}} \quad \text{أي:}$$

وبالتالي العدد الحقيقي $\frac{-\sqrt{3}}{2}$ هو حل هذه المعادلة.

$$x^2 - 81 = (x - 9)(5x - 3) \quad \text{*لدينا:}$$

$$(x - 9)(x + 9) - (x - 9)(5x - 3) = 0 \quad \text{تعني أن:}$$

$$(x - 9)(x + 9 - 5x + 3) = 0 \quad \text{تعني أن:}$$

$$(x - 9)(-4x + 12) = 0 \quad \text{تعني أن:}$$

$$x - 9 = 0 \quad \text{أو} \quad -4x + 12 = 0 \quad \text{تعني أن:}$$

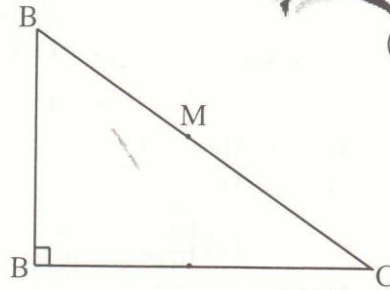
$$x = 9 \quad \text{أو} \quad -4x = -12 \quad \text{تعني أن:}$$

$$\boxed{x = 9} \quad \text{أو} \quad \boxed{x = \frac{-12}{-4} = 3} \quad \text{أي:}$$

إذن لهذه المعادلة حلان هما العددان 3 و 9.

حل التمرين 3

(الشكل A)



(1) حساب المسافة BC :

في المعطيات نعلم أن المثلث ABC قائم الزاوية في A ، إذن حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة لدينا:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$BC^2 = 6^2 + 8^2 \quad \text{تعني أن:}$$

$$BC^2 = 36 + 64 \quad \text{تعني أن:}$$

$$BC = \sqrt{100} \quad \text{تعني أن: } BC^2 = 100 \quad \text{أي: } BC = 10\text{cm}$$

$$\boxed{BC = 10\text{cm}} \quad \text{أي:}$$

(2) حساب النسب المثلثية للزاوية $\widehat{ABC}$:

بما أن المثلث ABC قائم الزاوية في A فإن النسب المثلثية

للزاوية $\widehat{ABC}$ هي :

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{AB}{BC} = \frac{6}{10}$$

$$\boxed{\cos \widehat{ABC} = 0,6}$$

أي:

$$\sin \widehat{ABC} = \frac{AC}{BC} = \frac{8}{10}$$

$$\boxed{\sin \widehat{ABC} = 0,8}$$

أي:

$$\tan \widehat{ABC} = \frac{AC}{AB} = \frac{8}{6}$$

$$\boxed{\tan \widehat{ABC} = \frac{4}{3}}$$

أي:

(3) حساب BM و CM :

بما أن المثلث AMC محاط بدائرة قطرها [AC] فإن المثلث

AMC قائم الزاوية في M أي أن $(AM) \perp (MC)$

ونعلم أن: $M \in [CB]$ إذن المستقيمان (MC) و (BM)

منطبقان ومنه فإن $(AM) \perp (BM)$ أي أن المثلث ABM

قائم الزاوية في M وبالتالي في المثلث ABM القائم الزاوية في M لدينا:

$$\cos \widehat{ABM} = \frac{BM}{AB}$$

$$\cos \widehat{ABM} = \cos \widehat{ABC} = 0,6 \quad \text{وبما أن:}$$

وأن: $AB = 6\text{cm}$ فإن: $0,6 = \frac{BM}{6}$

تعني أن: $BM = 6 \times 0,6$

أي أن: $BM = 3,6\text{cm}$

(+ حساب CM :

بما أن $M \in [BC]$ فإن: $BM + CM = BC$ أي أن $CM = BC - BM$

ونعلم أن: $BC = 10\text{ cm}$ و $BM = 3,6\text{ cm}$

إذن لدينا: $CM = 10 - 3,6$

أي: $CM = 6,4\text{ cm}$

(B) قياس زاوية حادة:

تبين أن: $\tan^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \tan^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha$

نعلم أن: $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

إذن لدينا: $\tan^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - \sin^2 \alpha$

تعني أن: $\tan^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}$

$\tan^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \sin^2 \alpha \left(\frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \right)$

وبما أن: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

فإن: $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$

إذن لدينا: $\tan^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \sin^2 \alpha \left(\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \right)$

وبالتالي: $\tan^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \tan^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha$

بطريقة أخرى:

$\tan^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha = \tan^2 \alpha \cdot (1 - \cos^2 \alpha)$

لأن: $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$

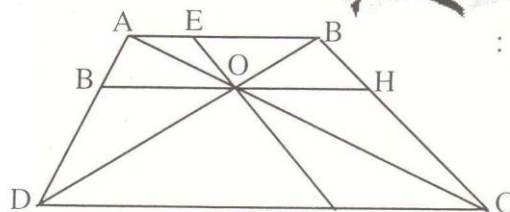
إذن: $\tan^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha = \tan^2 \alpha - \tan^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$

$\tan^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha = \tan^2 \alpha - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \cdot \cos^2 \alpha$

أي أن: $\tan^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha = \tan^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

حل التمرين 4

الشكل :



$$(1) \text{ نقارن } \frac{EA}{EB} \text{ و } \frac{OA}{OC}$$

في المثلث ABC نعلم أن :

$$\left\{ \begin{array}{l} (OE) // (BC) \\ O \in [AC] \\ E \in [AB] \end{array} \right. \text{ إذن حسب خاصية طاليس المباشرة}$$

$$(1) \boxed{\frac{OA}{OC} = \frac{EA}{EB}} \text{ لدينا :}$$

$$(*) \text{ نقارن } \frac{FA}{FD} \text{ و } \frac{OA}{OC}$$

في المثلث ADC نعلم أن :

$$\left\{ \begin{array}{l} (OF) // (DC) \\ O \in [AC] \\ F \in [AD] \end{array} \right. \text{ إذن حسب خاصية طاليس المباشرة}$$

$$(2) \boxed{\frac{FA}{FD} = \frac{OA}{OC}} \text{ لدينا :}$$

$$\boxed{\frac{EA}{EB} = \frac{FA}{FD}} \text{ وبالتالي من المتساويتين (1) و (2) نستنتج أن:}$$

ج) استنتاج $(BD) // (EF)$

نعلم أن : $E \in [AB]$

$F \in [AD]$

$$\text{وأن: } \frac{EA}{EB} = \frac{FA}{FD}$$

إذن حسب خاصية طاليس العكسية نستنتج أن: $(BD) // (EF)$

$$(3) \text{ نبين أن : } \frac{OF}{DC} + \frac{OH}{AB} = 1$$

في المثلث ADC نعلم أن :

إذن حسب خاصية طاليس المباشرة $\begin{cases} (OF) // (DC) \\ O \in [AC] \\ F \in [AD] \end{cases}$ لدينا :

$$\frac{AF}{AD} = \frac{AO}{AC} = \frac{OF}{DC}$$

ومنه فإن : $(3) \quad \boxed{\frac{AO}{AC} = \frac{OF}{DC}}$

وفي المثلث ABC نعلم أن :

إذن حسب خاصية طاليس المباشرة $\begin{cases} O \in [AC] \\ H \in [BC] \\ (OH) // (AB) \end{cases}$ لدينا :

$$\frac{CH}{CB} = \frac{CO}{CA} = \frac{OH}{AB}$$

ومنه فإن : $(4) \quad \boxed{\frac{OC}{AC} = \frac{OH}{AB}}$

وبالتالي من المتساويتين (3) و (4) نستنتج أن :

$$\frac{OF}{DC} + \frac{OH}{AB} = \frac{AO}{AC} + \frac{OC}{AC}$$

تعني أن :

$$\frac{OF}{DC} + \frac{OH}{AB} = \frac{AO + OC}{AC}$$

وبما أن : $O \in [AC]$ فإن : $AO + OC = AC$

وبالتالي لدينا : $\frac{OF}{DC} + \frac{OH}{AB} = \frac{AC}{AC}$

أي أن : $\boxed{\frac{OF}{DC} + \frac{OH}{AB} = 1}$