

- نعتبر نواسا مرنا رأسيا مكونا من نابض صلابته $K = 20N/m$ وجسم صلب كتلته $m = 200g$.
 نزيح الجسم S رأسيا نحو الأسفل عن موضع توازنه بـ $3cm$ ثم نحرره بدون سرعة بدئية.
 نعتبر معلما $(O, \vec{i})$ رأسيا موجهها نحو الأسفل أصله O منطبق مع مركز قصور الجسم S عند التوازن G_O .
 عند اللحظة $t = 0$ يمر الجسم من موضع توازنه المستقر G_O في المنحى الموجب.
 (1) أوجد إطالة النابض $\Delta \ell_o$ عند التوازن.
 (2) أوجد المعادلة التفاضلية للحركة.
 (3) أوجد المعادلة الزمنية للحركة.
 (4) احسب الدور الخاص لحركة المتذبذب.

نعطي : $g = 10N/Kg$

تصحيح:

● المجموعة المدروسة { الجسم S }

①

● جرد القوى :

- الجسم عند التوازن يخضع للقوى التالية:
 ● وزن الجسم : $\vec{P}$
 ● القوة المقرونة بتوتر الخيط عند التوازن شدتها $T_O = K\Delta \ell_o$
 هذه العلاقة تعبر عن شرط التوازن:
 $mg - K\Delta \ell_o = 0$

من خلال شرط الوزن لدينا : $T_O = P = m.g$ أي :

$$\Delta \ell_o = \frac{m.g}{K} = \frac{0.2Kg \cdot 10N/Kg}{20N/m} = 0.1m = 10cm$$

● تطبيق القانون الثاني لنيوتن :

②

● خلال حركته يخضع الجسم S للقوى التالية :

● وزن الجسم : $\vec{P}$

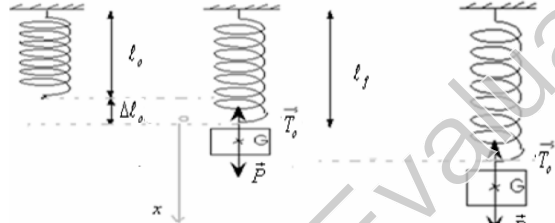
● القوة المقرونة بتوتر الخيط خلال التذبذب : $\vec{T} = -K(\Delta \ell_o + x)\vec{i}$

نكتب كما يلي : $\vec{P} + \vec{T} = m.\vec{a}_G$

● العلاقة : $\Sigma \vec{F} = m.\vec{a}_G$

$$(2) \vec{P} - K(\Delta \ell_o + x)\vec{i} = m.\vec{a}_G$$

نعتبر معلما $(O, \vec{i})$ موجهها نحو الأسفل أصله O . منطبق مع الطرف السفلي للنابض عند التوازن (انظر الشكل)



● بإسقاط العلاقة (2) على المحور (O, x) نحصل على :

$$+P - K(\Delta \ell_o + x) = m.a_x$$

$$mg - K\Delta \ell_o - Kx = m.\ddot{x}$$

وبما أنه من خلال شرط التوازن $mg - K\Delta \ell_o = 0$ فإن العلاقة السابقة تصبح :

$$-Kx = m.\ddot{x} \quad \text{أي :} \quad \ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0$$

المعادلة التفاضلية لحركة النواس المرن الراسي.

③ حل المعادلة التفاضلية السابقة يكتب كما يلي : $x(t) = x_m \cos(\omega_o t + \varphi)$

من خلال المعطيات لدينا : $x_m = 3cm$

ومن خلال الشروط البدئية لدينا عند اللحظة $t = 0$ ، $x = 0$ ، إذن : $0 = x_m \cos \varphi$ $\Leftrightarrow \cos \varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ وبما أنه عند

اللحظة $t = 0$ يمر الجسم من موضع توازنه في المنحى الموجب $v > 0$ عند هذه اللحظة

وبما أن : $x(t) = x_m \cos(\omega_o t + \varphi)$ فإن :

$$v = \dot{x} = -x_m \omega_o \sin(\omega_o t + \varphi)$$

وعند $t = 0$ لدينا $v = -x_m \omega_o \sin \varphi > 0 \Leftrightarrow \sin \varphi < 0 \Leftrightarrow \varphi < 0$ إذن : $\varphi = -\frac{\pi}{2}$

وبالتالي : $x(t) = 3.10^{-2} \cos(\omega_o t - \frac{\pi}{2})$

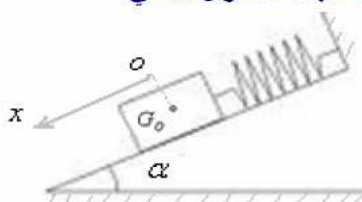
$$\omega_o = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{20}{0.2}} = \sqrt{100} = 10 \text{ rad/s}$$

$$T_o = \frac{2\pi}{\omega_o} = \frac{2\pi}{10} = 0.628s = 628ms$$

2- التمرين الثاني :

جسم صلب كتلته $m = 100g$ بإمكانه أن ينزلق بدون احتكاك فوق نضد هوائي ، مائل بزاوية $\alpha = 10^\circ$ بالنسبة للمستوى الأفقي.

هذا الجسم مرتبط بنابض كما يبينه الشكل التالي :



علما أن إطالة النابض عند التوازن $\Delta \ell_o = 8cm$ ، وشدة الثقالة $g = 9.8N/kg$

(1) أوجد إطالة النابض.

(2) نزيح الجسم الصلب عن موضع توازنه المستقر نحو الأسفل بـ $3cm$ ثم نحرره بدون سرعة بدئية .

(1-2) أوجد المعادلة التفاضلية للحركة.

2-2: علما أن مركز قصور الجسم يمر، عند اللحظة $t = 0$ من النقطة ذات الأفصول $x = +1.5cm$ ومنه : في المنحى الموجب .

أوجد المعادلة الزمنية للحركة التذبذبية .

(3-2) احسب الدور الخاص للحركة التذبذبية.

تصحيح:

موضع التوازن



عند التوازن ، يخضع الجسم الصلب للقوى التالية :

$\bar{P}$: وزنه .

$\bar{R}$: القوة المطبقة من طرف سطح التماس ، وهي عمودية على السطح ، لأن التماس يتم بدون احتكاك .

$\bar{T}_O$: القوة المقرونة بتوتر النابض عند التوازن ، شدتها: $T_O = k \cdot \Delta \ell_o$.

لدينا عند التوازن : $\bar{P} + \bar{T}_O + \bar{R} = \vec{0}$

بالإسقاط على المحور ox :

$$\Leftrightarrow +P \sin \alpha - T_O + 0 = 0$$

وهو شرط التوازن $m \cdot g \cdot \sin \alpha - k \cdot \Delta \ell_o = 0$

$$k = \frac{m \cdot g \cdot \sin \alpha}{\Delta \ell_o} = \frac{0,1 \text{ kg} \times 9,8 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1} \times \sin 10}{8 \times 10^{-2} \text{ m}} \approx 2,13 \text{ N/m}$$

ومنه :

② (1-2) خلال الحركة التذبذبية يخضع الجسم الصلب للقوى التالية:

$\bar{P}$: وزنه .

$\bar{R}$: القوة المطبقة من طرف سطح التماس ، وهي عمودية على السطح ، لأن التماس يتم بدون احتكاك .

$\bar{T}$: القوة المقرونة بتوتر النابض عند التوازن ، شدتها: $\bar{T} = -k(x + \Delta \ell_o) \bar{i}$

تطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\bar{P} + \bar{T} + \bar{R} = m \cdot \bar{a}_G$$

بالإسقاط العلاقة السابقة على المحور ox :

$$+P \sin \alpha + 0 - k(x + \Delta \ell_o) = m \cdot a_x$$

$$(2) \quad m \cdot g \cdot \sin \alpha - k \cdot x - k \Delta \ell_o = m \cdot \ddot{x}$$

أي :

ومن خلال شرط الوزن لدينا : $m \cdot g \cdot \sin \alpha - k \cdot \Delta \ell_o = 0$ إذن العلاقة (2) تصبح : $-k \cdot x = m \cdot \ddot{x}$

$$\Leftrightarrow m \cdot \ddot{x} + k \cdot x = 0 \quad \text{أي :} \quad \ddot{x} + \frac{k}{m} \cdot x = 0$$

(2-2) المعادلة الزمنية للحركة :

حل المعادلة التفاضلية $\ddot{x} + \frac{k}{m} \cdot x = 0$ هي عبارة عن دالة جيبية على الشكل :

$$x = x_m \cdot \cos(\omega_o \cdot t + \varphi)$$

مع : $x_m = 3 \text{ cm} = 3 \times 10^{-2} \text{ m}$

$$\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2,13}{0,1}} = 4,61 \text{ rad/s} \quad \text{النبيض الخاص :}$$

إذن الحل يصبح : $x = 3 \times 10^{-2} \cdot \cos(4,61 \cdot t + \varphi)$

تحديد الطور φ عند أصل التواريخ : من خلال الشروط البدئية لدينا : عند اللحظة $t = 0$ ، $x = +1,5 \text{ cm} = 1,5 \times 10^{-2} \text{ m}$

بالتعويض في الحل السابق : $x = x_m \cdot \cos(\omega_o \cdot t + \varphi)$ نحصل على : $1,5 \times 10^{-2} = 3 \times 10^{-2} \cdot \cos(\varphi)$

$$\cos \varphi = 0,5 \quad \text{ومنه :} \quad \varphi = \cos^{-1}(0,5) = \pm \frac{\pi}{3}$$

وبما أن الجسم يمر من هذه النقطة عند أصل التواريخ في المنحنى الموجب ، فإن $v > 0$ (عند $t = 0$) .

$$x = x_m \cdot \cos(\omega_o \cdot t + \varphi)$$

لدينا :

$$v = \dot{x} = -x_m \cdot \omega_o \cdot \sin(\omega_o \cdot t + \varphi) \quad \text{إذن :}$$

$$\Leftrightarrow \sin \varphi < 0 \quad \text{وعند} \quad t = 0 \quad v = \dot{x} = -x_m \cdot \omega_o \cdot \sin \varphi > 0$$

إذن : $\varphi = -\frac{\pi}{3}$ وبالتالي المعادلة الزمنية للحركة هي : $x = 3 \times 10^{-2} \cdot \cos(4,61 \cdot t - \frac{\pi}{3})$

$$(3-2) \quad \text{الدور الخاص :} \quad T_O = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_o} = 2 \pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 1,36 \text{ s}$$

3-موضوع الامتحان الوطني علوم الحياة والأرض الدورة الاستدراكية 2010

خلال حصة للأشغال التطبيقية قام التلاميذ بدراسة المجموعة المتذبذبة {جسم صلب- نابض أفقي}، قصد

تحديد الصلابة K للنابض وإبراز سلوك نفس المجموعة من الناحية الطاقة.

1. التذبذبات الميكانيكية الحرة في حالة الخمود المهمل

تتكون المجموعة المتذبذبة من جسم صلب (S) مركز قصوره G

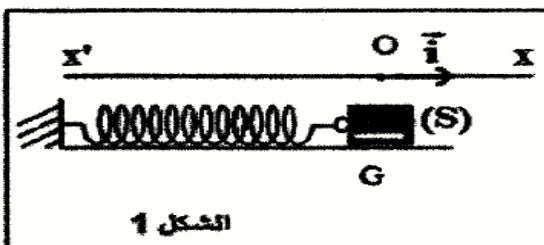
وكتلته m ، مثبت بطرف نابض أفقي لفاته غير متصلة وكتلته

مهمل وصلابته K . الجسم (S) قابل للانزلاق بدون احتكاك على

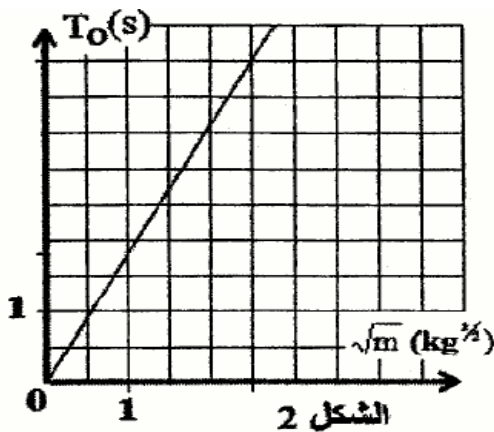
نضد هوائي أفقي (الشكل 1).

تمت إزاحة الجسم (S) أفقيا عن موضع توازنه بالمسافة x_m في

المنحنى الموجب للمعلم (O ، $\bar{i}$) وتحريره بدون سرعة بدئية عند



الشكل 1



الشكل 2

اللحظة $t=0$. عند التوازن يكون أفصول G منعدها ($x_G = 0$).

1.1. بتطبيق القانون الثاني لنيوتن، أثبت المعادلة التفاضلية التي يحققها الأفصول x لمركز القصور G .

2.1. يكتب حل المعادلة التفاضلية كالتالي: $x(t) = x_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi\right)$. أوجد تعبير T_0 الدور الخاص للمذبذب.

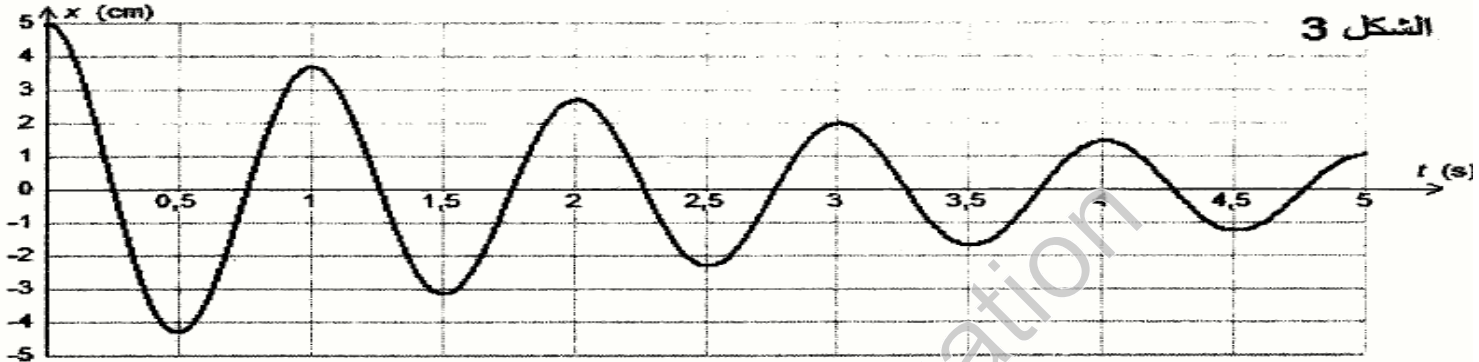
3.1. لدراسة تأثير الكتلة على قيمة الدور الخاص للمذبذب، قام التلاميذ بقياس T_0 بالنسبة لأجسام ذات كتل m مختلفة. مكنت النتائج التجريبية المحصلة من تمثيل تغيرات T_0 بدلالة $\sqrt{m}$ (الشكل 2).

حدد قيمة الصلابة K .

2. التذبذبات الميكانيكية الحرة في حالة الخمود

خلال حركة المجموعة المتذبذبة {جسم صلب - نابض} تم بواسطة جهاز ملائم الحصول على مخطط المسافات الممثل في الشكل 3.

الشكل 3



1.2. حدد صنف الخمود الذي يبرره الشكل 3.

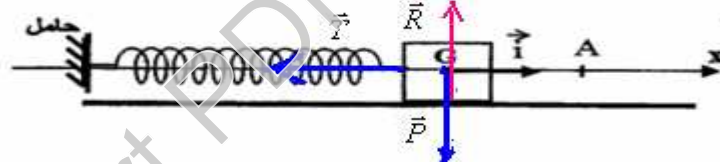
2.2. أحسب $W(\bar{F})$ شغل القوة المطبقة من طرف النابض على (S) بين اللحظتين $t_1=0$ و $t_2=3s$.

3.2. أوجد قيمة $\Delta E_m = E_{m2} - E_{m1}$ تغير الطاقة الميكانيكية للمجموعة المتذبذبة بين اللحظتين t_1 و t_2 ، واعط تفسيراً للنتيجة المحصلة.

تصيح:

1-1-1- المجموعة المدروسة - الجسم S

■ جرد القوى: الجسم S يخضع للقوى التالية: $\vec{P}$: وزن الجسم، $\vec{R}$: تأثير السطح و: $\vec{T}$: توتر النابض.



$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m \cdot \vec{a}_G \quad \text{مع: } \vec{T} = -k \cdot x \cdot \vec{i} \quad \text{قوة ارتداد.}$$

$$\vec{P} + \vec{R} - k \cdot x \cdot \vec{i} = m \cdot \vec{a}_G$$

■ تطبيق القانون الثاني لنيوتن:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad \text{أي: } m \cdot \ddot{x} + kx = 0 \quad \Leftarrow \quad 0 + 0 - k \cdot x = m \cdot \ddot{x} \quad \text{بالاسقاط على المحور } OX$$

$$\text{2-1- الحل: } x = x_m \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi) \quad \text{مع: } \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad \Leftarrow \quad \dot{x} = -x_m \cdot \omega_0 \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi) \quad \text{و:}$$

$$\ddot{x} = -x_m \cdot \omega_0^2 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi) = -x_m \cdot \omega_0^2$$

$$\text{بالتعويض في المعادلة التفاضلية: } -x \cdot \omega_0^2 + \frac{k}{m}x = 0 \quad \Leftarrow \quad -\omega_0^2 + \frac{k}{m} = 0 \quad \Leftarrow \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad \text{ومنه } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \Leftarrow \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\text{3-1- لدينا: } T_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{k}} \times \sqrt{m} \quad \text{من خلال المعامل الموجه: } \frac{2\pi}{\sqrt{k}} = \frac{4,5}{2,5} \quad \Leftarrow \quad k = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot 2,5^2}{4,5^2} = 12,2 \text{ N/m}$$

2-2- النظام شبه دوري $\Leftarrow$ خمود ضعيف الذي نحصل عليه في حالة الاحتكاك مع مانع.

$$\text{2-2- } W\bar{F}_{M_1 \rightarrow M_2} = \frac{1}{2} K(x_1^2 - x_2^2) = 0,5 \times 12,2 \cdot [(5 \cdot 10^{-2})^2 - (2 \cdot 10^{-2})^2] = 12,8 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

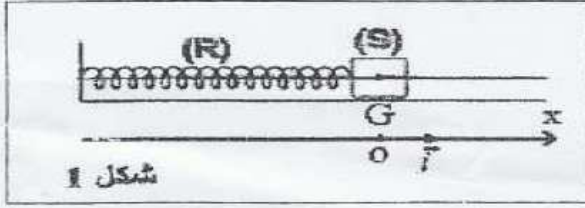
$$\text{3-2 } \Delta E_m = E_{m2} - E_{m1} \quad \text{مع: } E_{m1} = E_{c1} + E_{pe1} \quad \text{و: } E_{m2} = E_{c2} + E_{pe2}$$

نعلم أن سرعة المذبذب تنعدم عندما تكون السطالة قصوى أو دنوية $\Leftarrow E_{c1}$ و E_{c2} منعدمية.

$$\Delta E_m = E_{pe2} - E_{pe1} = \frac{1}{2} k(x_2^2 - x_1^2) = -12,8 \cdot 10^{-3} \text{ J} \quad \text{ومنه: } E_{m2} = E_{pe2} \quad \text{و: } E_{m1} = E_{pe1} \quad \Leftarrow$$

ناتج عن وجود الاحتكاك.

تحدث الزلازل اهتزازات أرضية تنتشر في جميع الاتجاهات يمكن تسجيلها بواسطة جهاز يدعى مسجل الهزات الأرضية (Sismographe). يؤدي مسجل الهزات وظيفته وفق مبدأ المتذبذب {جسم صلب - نابض}، الذي يمكن أن يكون في وضع رأسي أو أفقي. سنهتم في هذا التمرين بدراسة المجموعة المتذبذبة {جسم صلب - نابض أفقي}.



نثبت بطرف نابض (R) لفاته غير متصلة وكتلته مهمة وصلابته K، جسما صلبا (S) مركز قصوره G وكتلته $m = 92 \text{ g}$. الجسم (S) قابل للانزلاق على مستوى أفقي. لدراسة حركة مركز القصور G للجسم (S) نختار معلما $(O, \vec{i})$. عند التوازن يكون أقصول G منعما (شكل 1).

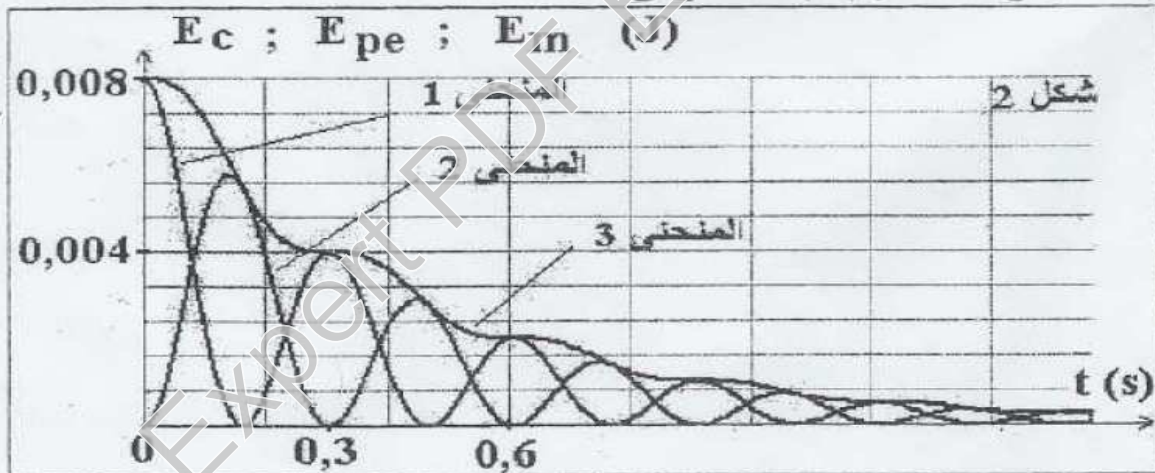
1. دراسة المجموعة المتذبذبة في حالة إهمال الاحتكاكات
نزيح الجسم (S) أفقيا عن موضع توازنه في المنحنى الموجب بالمسافة $X_m = 4 \text{ cm}$ ونحرره بدون سرعة بدئية عند اللحظة $t = 0$.

- 1.1. بتطبيق القانون الثاني لنيوتن، أثبت المعادلة التفاضلية التي يحققها الأقصول x لمركز القصور G. استنتج طبيعة حركة الجسم (S).
- 2.1. أحسب صلابة النابض علما أن الدور الخاص للمجموعة المتذبذبة هو $T_0 = 0,6 \text{ s}$.
- 3.1. أكتب المعادلة الزمنية للحركة.

4.1. حدد منحنى وشدة قوة التردد $\vec{F}$ المطبقة من طرف النابض على الجسم (S) عند اللحظة $t_1 = 0,3 \text{ s}$.

2. الدراسة الطاقية للمجموعة المتذبذبة

نختار الحالة التي يكون فيها النابض غير مشوه مرجعا لطاقة الوضع المرنة، والمستوى الأفقي الذي يشمل مركز القصور G مرجعا لطاقة الوضع الثقالية. نعتبر عند أصل التواريخ أن أقصول مركز قصور الجسم هو $+X_m$. تمثل الوثيقة المبينة في الشكل (2) تغيرات الطاقة الحركية E_c وطاقة الوضع المرنة E_{pe} والطاقة الميكانيكية E_m للمجموعة المتذبذبة بدلالة الزمن.



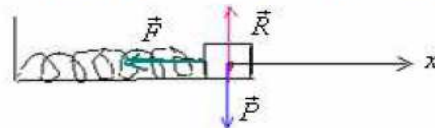
1.2. عين، معلا جوابك، المنحنى الممثل لكل من E_m و E_{pe} .

2.2. فسر تناقص الطاقة الميكانيكية E_m .

3.2. أوجد قيمة شغل القوة المطبقة من طرف النابض على الجسم (S) بين اللحظتين $t = 0$ و $t_1 = 0,3 \text{ s}$.

تصحيح موضوع الدورة الاستدراكية الحياة والأرض 2008

(1-1) الجسم S يخضع خلال حركته للقوى التالية : وزنه : $\vec{P}$ القوة المطبقة من طرف النابض $\vec{F}$ وتأثير سطح التماس $\vec{R}$.



بتطبيق القانون الثاني لنيوتن : $\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}_G$

$$\vec{F} = -K \cdot x \cdot \vec{i} \quad \text{ولدينا:} \quad \vec{P} + \vec{F} + \vec{R} = m \cdot \vec{a}_G$$

$$\vec{P} - K \cdot x \cdot \vec{i} + \vec{R} = m \cdot \vec{a}_G \quad \Leftarrow$$

$$0 - K \cdot x + 0 = m \cdot a_x \quad \text{بالإسقاط على المحور } ox :$$

$$m \cdot \ddot{x} + K \cdot x = 0 \quad \text{أي:}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} \quad \text{حركة الجسم S مستقيمة تذبذبية وجيبية نبضها الخاص :} \quad \ddot{x} + \frac{K}{m} \cdot x = 0 \quad \text{المعادلة التفاضلية للحركة:}$$

$$(2-1) \text{ الدور الخاص للحركة: } K = \frac{4\pi^2 m}{T_0^2} = \frac{4\pi^2 \times 92 \times 10^{-3}}{(0,6)^2} = 10 \text{ N/m} \Leftrightarrow T_0^2 = 4\pi^2 \frac{m}{K} \Leftrightarrow T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{K}{m}}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}$$

$$(3-1) \text{ المعادلة الزمنية للحركة: } x = x_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi\right) = 4 \times 10^{-2} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{0,6} t + \varphi\right)$$

ولدينا عند اللحظة $t = 0$: $x = 4 \times 10^{-2} \text{ m}$ ، $\varphi = 0 \Leftrightarrow \cos \varphi = 1$ وبالتالي $x = 4 \times 10^{-2} \cdot \cos \frac{10\pi}{3} t$

$$(4) \text{ عند اللحظة } t = 0,3 \text{ s} \quad x = 4 \cdot 10^{-2} \cos \frac{10\pi}{3} \times 0,3 = 4 \cdot 10^{-2} \cdot \cos \pi = -4 \times 10^{-2} \text{ m}$$

مع $x < 0$: القوة $\vec{F}$ لها نفس منحنى $\vec{i}$ شدتها $F = -Kx = -10 \text{ N/m}^{-1} \times (-4 \times 10^{-2} \text{ m}) = 0,4 \text{ N}$

أي النابض مكبس يسلط قوة دافعة ، قوة ارتداد تسعى على رد الجسم S إلى موضع توازنه المستقر.

$$(2) \text{ الدراسة الطاقية للمجموعة المتذبذبة: } (1-2) \text{ طاقة الوضع المرنة: } E_{pe} = \frac{1}{2} K x^2$$

$$\text{عند اللحظة } t=0 \quad x = x_m \quad E_{pe} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (4 \cdot 10^{-2})^2 = 0,008 \text{ J}$$

$$\text{وبما أن: } E_c = \frac{1}{2} m v^2 \quad \text{وعند } t=0 \quad v=0 \quad E_c = 0 \quad \text{أي: } E_m = E_c + E_{pe}$$

$$\text{في كل لحظة لدينا: } E_m = E_c + E_{pe} \quad \text{المنحنى (3) يمثل } E_m$$

(2-2) يعضى تناقص الطاقة الميكانيكية إلى وجود الاحتكاك .

(3-2) شغل القوة المطبقة من طرف النابض على الجسم بين اللحظتين $t_0 = 0$ و $t_3 = 0,3 \text{ s}$ هو :

$$W\vec{F} = \frac{1}{2} K (x_0^2 - x_3^2) \quad \text{لدينا: } x_0 = x_m = 4 \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$\text{نعلم أن: } E_{pe3} = \frac{1}{2} K x_3^2 \quad \text{وميلنا عند اللحظة } t = 0,3 \text{ s} \quad E_{pe3} = 0,004 \text{ J} \quad x_3^2 = 2 \frac{E_{pe3}}{K} = 2 \times \frac{0,004}{10} = 8 \times 10^{-4}$$

$$W\vec{F} = \frac{1}{2} K (x_0^2 - x_3^2) = \frac{1}{2} \cdot 10 (16 \cdot 10^{-4} - 8 \cdot 10^{-4}) = 4 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

5- موضوع الدورة العادية علوم رياضية 2010

المجموعة الميكانيكية المتذبذبة هي مجموعة ميكانيكية تنجز حركة دورية ذهابا وإيابا حول موضع توازنها المستقر .

يتكون نواس مرّن أفقي من جسم صلب (S) كتلته m ، مثبت بطرف نابض لفاثه غير متصلة وكتلته مهملة وصلابته K . الطرف الآخر للنابض مثبت في حامل ثابت

كما يبين الشكل (2) . عند التوازن ، ينطبق مركز القصور G للجسم (S) مع الأصل O لنظام الفضاء $(O, \vec{i})$ المرتبط بالأرض . نزيح الجسم (S) عن موضع توازنه في المنحنى الموجب إلى أن ينطبق مركز قصوره G مع نقطة A تبعد عن O بمسافة d . نعتبر الحالتين التاليتين :

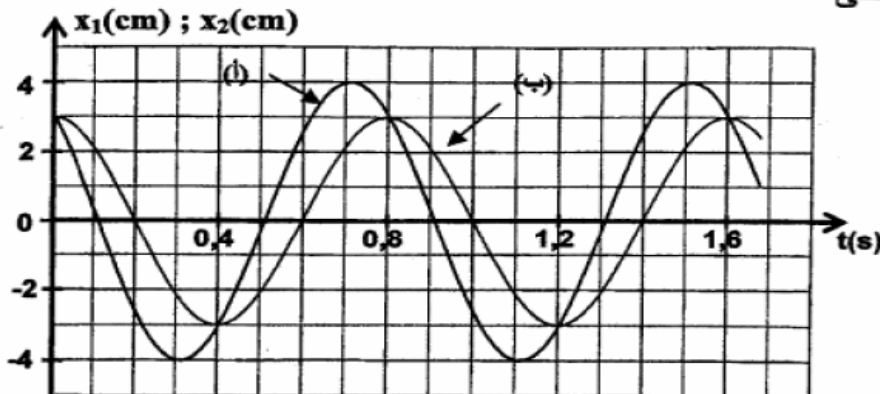
- الحالة الأولى : نحرر الجسم (S) عند النقطة A ، بدون سرعة بدئية ، عند لحظة $t = 0$.
- الحالة الثانية : نرسل الجسم (S) انطلاقا من النقطة A في المنحنى السالب ، بسرعة بدئية $\vec{v}_A$ ، عند لحظة $t = 0$.

في الحالتين ينجز الجسم (S) حركة تذبذبية حول موضع توازنه O .

- 1- أثبت المعادلة التفاضلية التي يحققها الأقسام x لمركز القصور G .
- 2- أوجد التعبير الحرفي للدور الخاص T_0 للمتذبذب ليكون حل المعادلة التفاضلية هو :

$$x = x_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi\right)$$

3- نحصل ، بواسطة جهاز ملائم ، على منحنى



شكل 3

تطور الأقسامولين x_1 و x_2 لمركز قصور الجسم (S) ، تباعا ، في الحالتين الأولى والثانية ، كما يبين الشكل (3) .

عين ، معلقا جوابك ، المنحنى الموافق لحركة المتذبذب في الحالة الأولى .

4- نعتبر المتذبذب في الحالة الثانية ، ونرمز لوسع حركته بـ x_{m2} وللطور

عند أصل التواريخ بـ φ_2 .

4.1- حدد من المبيان الممثل في الشكل (3)

قيمة المسافة d وقيمة الوسع x_{m2} .

4.2- بتطبيق انحفاظ الطاقة الميكانيكية ، بين أنه يمكن التعبير عن الوسخ x_{m2} بالعلاقة :

$$x_{m2} = \sqrt{\frac{m \cdot v_A^2}{K} + d^2}$$

4.3- أوجد تعبير $\tan \phi_2$ بدلالة d و x_{m2} .

تصحیح موضوع الدورة العادية علوم رياضية 2010

(1) المجموعة المدروسة: الجسم (S)

- جرد القوى:

$\vec{P}$: وزن الجسم.

$\vec{T}$: القوة المقرونة بتوتر النابض.

$\vec{R}$: القوة المقرونة بتأثير السطح.

تطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{R} = m\vec{a}$$

نسقط العلاقة على المحور (Ox)

$$0 - Kx + 0 = ma_x = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

(2) $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ (3) الحالة الأولى: تم تحرير الجسم بدون سرعة بدئية سيحتفظ بالوسخ $x_{1m} = 3cm$ وهو يوافق المنحنى (ب)

الحالة الثانية: الجسم تم تحريره بسرعة بدئية سيصبح وسخ حركته أكبر وهو يوافق المنحنى (ا) $x_{2m} = 4cm$

4-4 1-4 $d = 3cm$ و $x_{2m} = 4cm$ -2-4 بتطبيق قانون انحفاظ الطاقة الميكانيكية للمجموعة المتذبذبة في الحالة 2 بين الموضع A

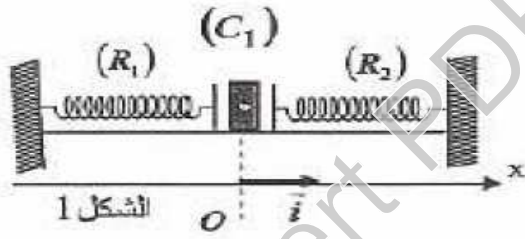
والموضع الموافق ل: $x_2 = x_{2m}$ حيث تصبح السرعة منعدمة: $E_{cA} + E_{pA} = 0 + E_{p,max} \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}kd^2 = \frac{1}{2}Kx_{2m}^2$ ومنه:

$$x_{2m} = \sqrt{\frac{m \cdot v_A^2}{K} + d^2} \quad 4-3 \text{ من خلال الشروط البدئية لدينا: } d = x_{2m} \cdot \cos \phi_2 \Leftrightarrow \cos \phi_2 = \frac{d}{x_{2m}} \text{ ولدينا: عند } t=0, v < 0 \Leftrightarrow$$

$$tg \phi_2 = \sqrt{\left(\frac{x_{2m}}{d}\right)^2 - 1} \text{ ومنه } (tg \phi)^2 = \frac{1}{(\cos \phi)^2} - 1 \text{ ومن جهة أخرى لدينا: } \phi_2 > 0 \Leftrightarrow \sin \phi_2 > 0 \text{ أي: } -x_{2m} \cdot \frac{2\pi}{T_0} \sin \phi_2 < 0$$

6-موضوع علوم رياضية الدورة الاستدراكية 2008

أثناء إجراء البحوث داخل مركبة فضائية في مدارها حول الأرض، يقوم رجل الفضاء بقياس كتل بعض الأحسام، وذلك باستعمال جهاز مكون من مقصورة (A) كتلتها $m = 200 g$ قابلة للانزلاق على مستوى أفقي بدون احتكاك. المقصورة مرتبطة بطرفي نابضين (R_1) و (R_2) لهما نفس الصلابة k ونفس الطول الأصلي l_0 . الطرف الآخر لكل نابض مثبت بحامل ثابت (شكل 1). عند التوازن يكون طول كل نابض أكبر من طوله الأصلي.



قبل استعمال هذا الجهاز داخل المركبة الفضائية خضع للتجربة التالية على سطح الأرض:

وضع جسم صلب (C_1) كتلته $M_1 = 100 g$

داخل المقصورة (A) و أزيحت المجموعة (S)

المكونة من المقصورة (A) و الجسم (C_1) عن

موضع توازنها G_0 المنطبق مع أصل المعلم $(O, \vec{i})$

نحو اليمين بمسافة X_m و حررت بدون سرعة بدئية، فأنجز مركز القصور G للمجموعة

(S) حركة تذبذبية حول موضع توازنها بحيث بقي النابضان مطالين.

مكن حاسوب مزود بنظام المسك من تسجيل المنحنى الممثل لتغيرات الأفضول x لمركز

القصور G للمجموعة (S) بدلالة الزمن (شكل 2).

1- بين أن للنابضين، عند التوازن، نفس الإطالة $\Delta l_1 = \Delta l_2 = \Delta l_0$.

2- بين أن الأفضول x لمركز قصور المجموعة (S) يحقق المعادلة التفاضلية التالية :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2k}{m + M_1}x = 0$$

3- يكتب حل المعادلة التفاضلية على الشكل :

$$x(t) = X_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \phi\right)$$

3.1 - حدد انطلاقاً من المبيان الطور ϕ للحركة.

3.2 - باستعمال المعادلة التفاضلية و حلها،

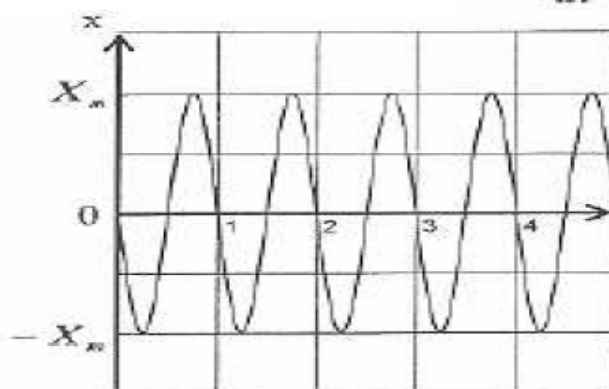
أوجد تعبير الدور الخاص T_0 للحركة

بدلالة M_1 و m و k .

3.3 - باستغلال مبيان الشكل 2، احسب قيمة

الصلابة k . تأخذ $\pi^2 = 10$.

3.4 - أنجز رجل الفضاء نفس التجربة



شكل 2

باستعمال نفس الجسم (C_1) ونفس الجهاز السابق داخل

مركبة فضائية في مدارها حول الأرض ، فوجد نفس القيمة للدور الخاص T_0 . ماذا تستنتج؟
3.5 - استعمل رجل الفضاء نفس الجهاز السابق لقياس الكتلة M_2 لجسم (C_2) دخل المركبة الفضائية، فوجد أن قيمة الدور الخاص للمتذبذب هي: $T_0' = 1,5 s$ ، استنتج قيمة M_2 .

تصحيح موضوع علوم رياضية الدورة الاستدراكية 2008

1. المجموعة المدروسة { الجسم C_1 + كتلتها : $m + M_1$.

تخضع المجموعة عند التوازن للقوى التالية :

$\bar{P}$: وزن المجموعة . $\bar{F}_1$: القوة المطبقة من طرف النابض R_1 .

$\bar{R}$: تأثير سطح التماس . $\bar{F}_2$: القوة المطبقة من طرف النابض R_2 .

بتطبيق شرط التوازن : $\Sigma \bar{F} = \bar{0}$

$$\bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{P} + \bar{R} = \bar{0}$$

مع : x قيمة جبرية.

$$F_2 = k(\Delta \ell_o - x) \quad \text{و} \quad F_1 = k(\Delta \ell_o + x)$$

2- خلال الحركة :

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{P} + \bar{R} = (M_1 + m) \cdot \vec{a}_G$$

بالإسقاط على ox :

$$-F_1 + F_2 + 0 + 0 = (M_1 + m) \cdot a_x$$

$$-k(\Delta \ell_o + x) + k(\Delta \ell_o - x) + 0 + 0 = (M_1 + m) \cdot a_x$$

$$-k\Delta \ell_o - kx + k\Delta \ell_o - kx = (M_1 + m) \cdot \ddot{x}$$

$$-2kx = (M_1 + m) \cdot \ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{2k}{M_1 + m} x = 0 \quad \text{أي} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{2k}{M_1 + m} x = 0$$

$$k\Delta \ell_2 = k\Delta \ell_1 \quad \Leftarrow \quad -k\Delta \ell_1 + k\Delta \ell_2 = 0 \quad \Leftarrow \quad -F_1 + F_2 + 0 + 0 = 0 \quad \text{على } ox :$$

مع : x قيمة جبرية.

$$F_2 = k(\Delta \ell_o - x) \quad \text{و} \quad F_1 = k(\Delta \ell_o + x)$$

2- خلال الحركة :

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{P} + \bar{R} = (M_1 + m) \cdot \vec{a}_G$$

بالإسقاط على ox :

$$-F_1 + F_2 + 0 + 0 = (M_1 + m) \cdot a_x$$

$$-k(\Delta \ell_o + x) + k(\Delta \ell_o - x) + 0 + 0 = (M_1 + m) \cdot a_x$$

$$-k\Delta \ell_o - kx + k\Delta \ell_o - kx = (M_1 + m) \cdot \ddot{x}$$

$$-2kx = (M_1 + m) \cdot \ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{2k}{M_1 + m} x = 0 \quad \text{أي} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{2k}{M_1 + m} x = 0$$

$$x(t) = X_M \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi\right) \quad \text{3-1- حل المعادلة التفاضلية السابقة يكتب كما يلي :}$$

من خلال الشكل 2 لدينا : $x = 0$ عند اللحظة : $t = 0$.

$$\varphi = \pm \frac{\pi}{2} \quad \Leftarrow \quad \cos \varphi = 0 \quad \Leftarrow \quad 0 = X_M \cos(\varphi) \quad \text{إذن :}$$

ومن خلال المنحنى ، عند $t = 0$ تنتقل المجموعة في عكس منحنى ox ، عند $t = 0$: $v < 0$ عند $t = 0$:

$$\varphi = +\frac{\pi}{2} \quad \Leftarrow \quad \varphi > 0 \quad \Leftarrow \quad \sin \varphi > 0 \quad \Leftarrow \quad v = -x_M \sin(\varphi) < 0 \quad \text{عند } t = 0 \quad v = \dot{x} = -x_M \sin\left(\frac{2\pi}{T} t + \varphi\right)$$

3-2 من خلال المعادلة التفاضلية للحركة :

$$\omega_o^2 = \frac{2k}{m + M_1} \quad \Leftarrow \quad \omega_o = \sqrt{\frac{2k}{m + M_1}} \quad \Leftarrow \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m + M_1}{2k}}$$

3-3 مبيانيا لدينا : $T = 1s$

$$k = \frac{4 \cdot \pi^2 (m + M_1)}{2T^2} = \frac{0,3kg \cdot 4 \cdot (10)}{2 \cdot (1s)^2} = 6N / m \quad \Leftarrow \quad \frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{m + M_1}{2k}$$

4-3 الدور الخاص للمجموعة لا يتعلق سوى بكتلتها وصلابة النابض .

$$M_2 = \frac{k T_2'^2}{2\pi^2} - m = \frac{6N \cdot m^{-1} \cdot (1,5s)^2}{20} - 0,2kg = 0,475kg = 475g \quad \Leftarrow \quad \frac{T_2'^2}{4\pi^2} = \frac{m + M_2}{2k} \quad \Leftarrow \quad T_2' = 2\pi \sqrt{\frac{m + M_2}{2k}} \quad \text{4-4}$$

نهمل جميع الاحتكاكات ونأخذ $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$ و $\pi^2 = 10$.

نعتبر المجموعة S: المسئلة في الشكل (1) والمكونة من:

- نابض لفاته غير متصلة وكتلته مهملة وصلابته K، ثبت أحد طرفيه بحامل بينما ثبت الطرف الآخر

بجسم صلب S_1 مركز قصوره G_1 وكتلته $m_1 = 100 \text{ g}$.

- بكرة متجانسة كتلتها $m = 2 m_1$ وشعاعها r قابلة للدوران في المستوى الراسي حول محور أفقي

ثابت Δ يمر من مركزها O. عزم قصور البكرة بالنسبة للمحور Δ هو $J_\Delta = \frac{1}{2} m r^2$.

- خيط غير مدود كتلته مهملة ويمر دون انزلاق بمجرى البكرة، ثبت أحد طرفيه بالجسم S_1 وثبت طرفه

الآخر بجسم S_2 مركز قصوره G_2 وكتلته $m_2 = m_1$.

عند التوازن يكون النابض مطالا ب Δl_0 و G_1 و G_2 منطبقا

مع الأصل O_1 للمعلم $(O_1, \vec{i})$ و G_2 و G_1 منطبقا مع

الأصل O_2 للمعلم $(O_2, \vec{k})$ والمسافة الفاصلة

بين المستوى الأفقي المار من G_1 و O_2 هي h.

نزيح الجسم S_1 عن موضع توازنه في المنحنى الموجب

بمسافة x_m ثم نحرره بدون سرعة

بدنية عند اللحظة $t = 0$.

يمثل الشكل (2) جزءا من تسجيل حركة النقطة G_1

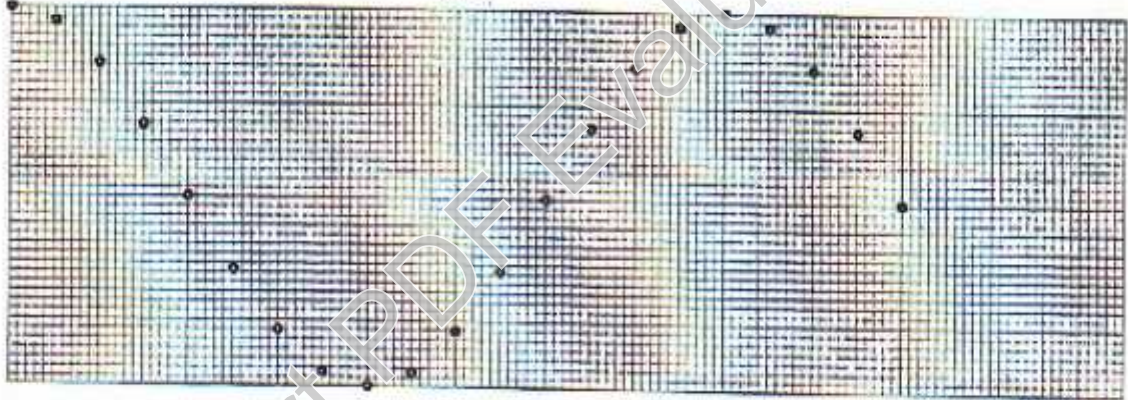
بالسلم الحقيقي خلال مدد زمنية متتالية

ومتساوية $\tau = 40 \text{ ms}$.

1- ماذا يمثل المنحنى عندما نصل نقط التسجيل

بعضها ببعض؟

2- بين أن النبض الخاص لحركة الانذب هو $\omega_0 = \frac{25}{8} \pi \text{ rad.s}^{-1}$.



الشكل 2

3- نعلم عند لحظة t موضع G_1 بالأفصول x وموضع G_2 بالأنسوب z.

3.1- اكتب المعادلة الزمنية $x(t)$ لحركة مركز القصور G_1 .

3.2- عبر عن الطاقة الحركية للجسم S_1 بدلالة m_1 و ω_0 و x_m و x. احسب قيمتها القصوى.

3.3- أوجد تعبير طاقة الوضع للمجموعة S.

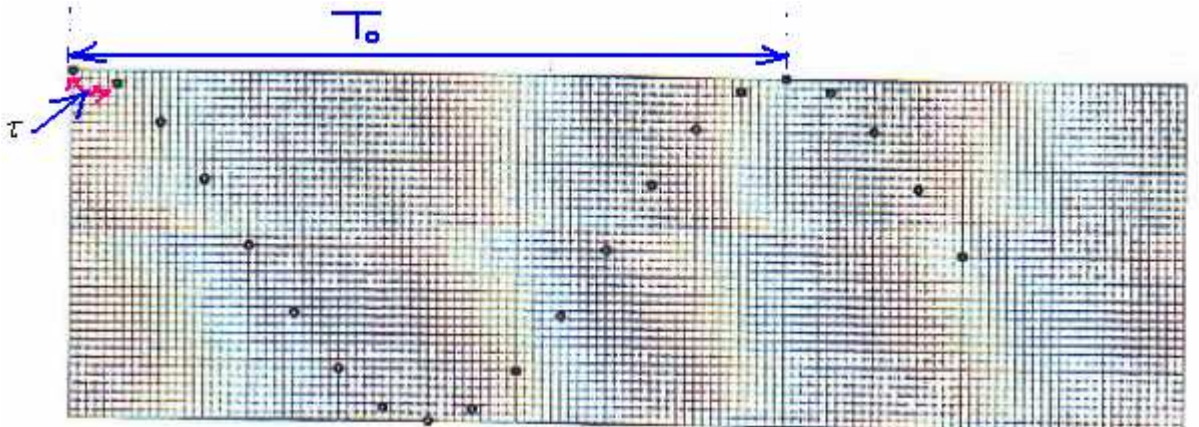
نختار المستوى الأفقي الذي تنتمي إليه النقطة O_2 مرجعا لطاقة الوضع الثقالية والحالة التي يكون فيها النابض غير مشوه مرجعا لطاقة الوضع المرنة.

3.4- أوجد، اعتمادا على الدراسة الطاقية، المعادلة التفاضلية لحركة الجسم S_2 واستنتج قيمة الصلابة K للنابض.

تصحيح موضوع الوطني - علوم رياضية الدورة الاستدراكية 2007:

1- المنحنى المحصل عليه يمثل تغيرات استطالة مركز قصور الجسم S_1 بدلالة الزمن: $x=f(t)$.

2- بما أن المدة التي تفصل نقطتين متتاليتين من التسجيل هي τ .



$$\omega_o = \frac{2\pi}{T_o} = \frac{2\pi}{16\tau} = \frac{2\pi}{16 \times 40.10^{-3}s} = \frac{2\pi}{0,64} = \frac{200\pi}{64} = \frac{25 \times 8\pi}{8 \times 8} = \frac{25\pi}{8} \quad \Leftarrow T_o = 16\tau \text{ مع } T_o = \frac{2\pi}{\omega_o}$$

$$v = \dot{x} = -x_m \cdot \omega_o \cdot \sin(\omega_o \cdot t + \varphi) \quad \Leftarrow \quad x = x_m \cdot \cos(\omega_o \cdot t + \varphi) \quad \text{-3-1}$$

$$E_{c1} = \frac{1}{2} m_1 \cdot v^2 = \frac{1}{2} m_1 \cdot \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m_1 \cdot x_m^2 \cdot \omega_o^2 \cdot \sin^2(\omega_o \cdot t + \varphi) \quad \text{-3-2} \quad \text{ونعلم أن: } \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \quad \text{إذن:}$$

$$E_{c1} = \frac{1}{2} m_1 \cdot \omega_o^2 (x_m^2 - x^2) \quad \Leftarrow \quad E_{c1} = \frac{1}{2} m_1 \cdot x_m^2 \cdot \omega_o^2 [1 - \cos^2(\omega_o \cdot t + \varphi)] = \frac{1}{2} m_1 \cdot \omega_o^2 (x_m^2 - x^2)$$

$$E_{c1} \max = \frac{1}{2} m_1 \cdot \omega_o^2 x_m^2 \quad \Leftarrow \quad E_c \text{ قصوى بالنسبة ل: } x=0$$

-4-3 عندما يكون النابض مطالا بمسافة x :

$$E_e = \frac{1}{2} K(x + x_o)^2 \quad \text{-تكون الطاقة المرنة للنواس المرن:}$$

$$E_{c1} = \frac{1}{2} m_1 \cdot v^2 \quad \text{- الطاقة الحركية للجسم } S_1$$

$$E_c = \frac{1}{2} J_A \cdot \omega^2 \quad \text{- الطاقة الحركية للبكرة:}$$

$$E_{c2} = \frac{1}{2} m_2 \cdot v^2 \quad \text{- الطاقة الحركية للجسم } S_{21}$$

$$E_{pp} = -m \cdot g \cdot x \quad \text{- طاقة الوضع الثقالية للجسم } S_2 \quad \text{والطاقة الكلية للمجموعة:}$$

$$E = \frac{1}{2} K(x + x_o)^2 + \frac{1}{2} m_1 \cdot v^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot v^2 + \frac{1}{2} J_A \omega^2 - mgx \quad \text{أي:}$$

$$\Leftarrow m_2 g = K \cdot x_o \quad \text{باعتبار شرط التوازن:} \quad E = \frac{1}{2} Kx^2 + \frac{1}{2} Kx_o^2 + Kx \cdot x_o + \frac{1}{2} m_1 \cdot v^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot v^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} M \cdot R^2 \right) \cdot \frac{v^2}{R^2} - mgx$$

$$E = \frac{1}{2} Kx^2 + \frac{1}{2} Kx_o^2 + v^2 \left(\frac{1}{2} m_1 + \frac{1}{2} m_2 + \frac{1}{2} M \right) \quad \Leftarrow \quad Kx \cdot x_o - mgx = 0 \quad \text{و: } \omega = \frac{v}{R}$$

$$E = Kx^2 + Kx_o^2 + v^2 \left(m_1 + m_2 + \frac{M}{2} \right) \quad \Leftarrow \quad E = Kx^2 + Kx_o^2 + m_1 \cdot v^2 + m_2 \cdot v^2 + \frac{1}{2} M \cdot v^2 \quad \Leftarrow$$

$$Kx + 0 + \ddot{x} \left(m_1 + m_2 + \frac{M}{2} \right) = 0 \quad \Leftarrow \quad 2Kx \cdot \dot{x} + 0 + 2 \cdot \dot{x} \cdot \ddot{x} \left(m_1 + m_2 + \frac{M}{2} \right) = 0 \quad \Leftarrow \quad \frac{dE}{dt} = 0 \quad \text{وبما أن الطاقة الكلية ثابتة:}$$

$$\ddot{x} + \frac{K}{3m} x = 0 \quad \text{أي:} \quad 3m \cdot \ddot{x} + Kx = 0, \quad M=2m \text{ و } m_1=m_2=m \quad \text{وهي المعادلة التفاضلية للحركة.}$$

$$\frac{K}{3m} = \left(\frac{25\pi}{8} \right)^2 \frac{K}{3m} \quad \Leftarrow \quad \omega_o = \frac{25\pi}{8} \quad \text{ولدينا:} \quad \omega_o = \sqrt{\frac{K}{3m}} \quad \text{ومنه، النبض الخاص للحركة:}$$

$$K = 3m \cdot \left(\frac{25\pi}{8} \right)^2 = 3 \cdot 0,1 \times \left(\frac{25\pi}{8} \right)^2 \approx 29 N/m$$

8 - التمرين الثامن:

المجموعة (S) كتلة $m=200g$ ونابض (R) ذي لفات غير متصلة صلابته K في حالة توازن (الشكل).

نعتبر الاحتكاكات مهملة بين الجسم والمستوى الأفقي على الجزء AB.

نزح الجسم عن موضع توازنه ب $2cm$ نحو اليمين ونحرره بدون سرعة بدئية في لحظة نعتبرها اصلا للتواريخ ($t=0$) فينجز حركة ذهاب

واباب حول موضع التوازن O. نقيس المدة الزمنية لعشر ذبذبات فنجد $\Delta t = 5s$

1 - بتطبيق القانون الثاني لنيوتون، اوجد المعادلة التفاضلية لحركة الجسم ما طبيعة الحركة؟

2 - ما قيمة الصلابة K للنابض؟ نعتبر $\pi^2 = 10$

3 - اكتب المعادلة الزمنية للحركة أي حل المعادلة التفاضلية.

4 - ما قيمة السرعة القصوى للجسم؟

5 - عند مرور الجسم من موضع التوازن ينفصل عن النابض فيصل الى النقطة B بالسرعة المحددة في السؤال 3 ليتوقف في النقطة C.

1-5 بتطبيق مبرهنة الطاقة الحركية بين B و C، اوجد تعبير وقيمة شغل القوة $\vec{R}$ المسلطة من طرف المستوى الأفقي BC على (S). استنتج طبيعة التماس.

2-5 احسب الشدة f لقوة الاحتكاك والتي نعتبرها ثابتة. $BC=20cm$

$$g = 10 m/s^2$$

تصحيح:

1- المعادلة التفاضلية $m\ddot{x} + K.x + 0$ الحركة مستقيمة تذبذبية وجيبية $\omega_o^2 = \frac{K}{m}$ -2 ولدينا : $T_o = \frac{5}{10} = 0,5s$ و $\omega_o = \frac{2\pi}{T_o} = 4\pi$

3- $K = m.\omega_o^2 = 0,2.(4.\pi)^2 = 32N/m$ المعادلة الزمنية $x = 2.10^{-2} \cos 4\pi.t$ لأن من خلال الشروط البدئية نجد : $\varphi = 0$ -4

5- $v = \sqrt{\frac{K.x_m^2}{m}} = x_m \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} = 2.10^{-2} \cdot \sqrt{\frac{32}{0,2}} \approx 0,25m/s \Leftrightarrow \frac{1}{2}m.v^2 = \frac{1}{2}K.x_m^2 \Leftrightarrow E_{c_{\max}} = E_m = \frac{1}{2}K.x_m^2$

مع $E_{cc} - E_{cb} = W\vec{R} + W\vec{P}$ و $W\vec{P} = 0$ و $E_{cc} = 0$ ومنه : $-E_{cb} = W\vec{R} \Leftrightarrow W\vec{R} = -\frac{1}{2}mv_B^2 = -0,5 \times 0,2 \times 0,064 = -6,4.10^{-3} J$

-2-5 $f = \frac{-W\vec{R}}{BC} = \frac{-6,4.10^{-3}}{0,2} = 0,032N \Leftrightarrow W\vec{R} = -f.BC$

SBIRO Abdelkrim

Expert PDF Evaluation