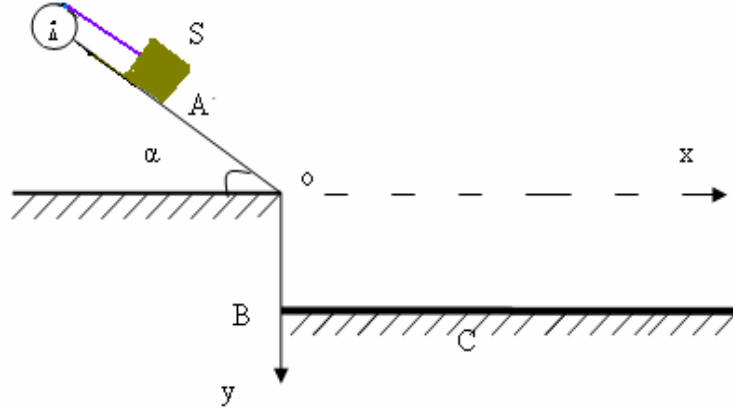


(I)

نعتبر جسما (S) صلبا كتلته $m = 0,25\text{kg}$ ، يمكنه أن ينزلق بدون احتكاك فوق مستوى مائل بزاوية $\alpha = 30^\circ$ بالنسبة للخط الأفقي .
الجسم (S) مثبت في طرف حبل ذي كتلة مهملة وغير قابل للتمدد و يدور بدون انزلاق على مجرى بكرة شعاعها $r = 5\text{cm}$ قابلة للدوران حول محور أفقي وثابت Δ .
نعطي عزم قصور البكرة بالنسبة للمحور Δ : $J_\Delta = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{kg.m}^2$ و شدة الثقالة: $g = 10 \text{m/s}^2$.



(1) نطلق الجسم (S) من النقطة A بدون سرعة بدنية فينزل فوق المستوى المائل مسببا دوران البكرة .
1-1: احسب تسارع الجسم (S) واستنتج طبيعة حركته .

2-1: احسب سرعة الجسم (S) في النقطة O علما أن : $OA = 2\text{m}$.

(2) في النقطة O ينفلت الحبل من البكرة فيسقط الجسم (S) في النقطة C من علو $OB = 75\text{cm}$.

1-2: أعط المعادلتين الزمنتين لحركة الجسم (S) في المعلم (o, x, y) .

2-2: استنتج : (أ) مدة السقوط الحر للجسم (S) .

(ب) المسافة BC .

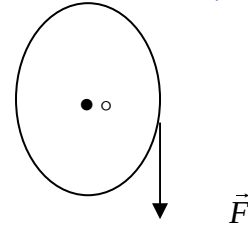
(3) عندما ينفلت الحبل من البكرة تخضع هذه الأخيرة إلى مزدوجة مقاومة عزمها ثابت $M_\Delta = -7,5 \times 10^{-2} \text{N.m}$ ليتوقف بعد انجاز عدة دورات .

1-3: احسب التسارع الزاوي $\ddot{\theta}$ للبكرة .

2-3: ما عدد الدورات التي أنجزتها البكرة خلال مدة الكبح ؟

(II)

يمكن لقرص متجانس كتلته m وشعاعه $r = 5\text{cm}$ ، أن يدور حول محوره الأفقي Δ بدون احتكاك . نلف على محيط القرص خيطا رقيقا . (انظر الشكل)



عزم قصور القرص بالنسبة لمحور الدوران : $J_\Delta = \frac{1}{2} m.r^2$.

(1) نطبق على القرص قوة $\vec{F}$ مماسة لمحيطه وثابتة ، شدتها تساوي نصف شدة الوزن P للقرص مسببة دوران القرص حول محوره Δ . علما أنه في اللحظة $t = 0$ ، $\theta = 0$ والسرعة البدنية منعدمة .

1-1: أوجد تعبير التسارع الزاوي $\ddot{\theta}$ للبكرة بدلالة g و r ثم احسب قيمته .

2-1: ما المدة الزمنية التي ينجز فيها القرص دورة كاملة ؟

3-1: ما السرعة الزاوية بعد هذه المدة ؟

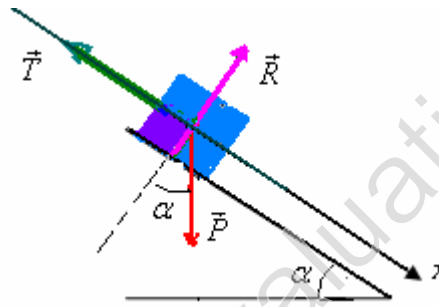
(2) عندما تصبح سرعة القرص 10 دورات في الثانية، نحذف تأثير الخيط . نلاحظ أنه نتيجة التأثيرات العديدة التي تسبب كبح القرص ، فإن سرعته تتناقص لتتعدم بعد 5 دقائق .

1-2: احسب عدد الدورات التي ينجزها القرص قبل توقفه النهائي (باعتبار لحظة الانفصال عن القرص هي اللحظة $t = 0$) .

2-2: عبر بدلالة m و r عن العزم M لمزدوجة الكبح الذي نعتبره ثابتا . نعطي : $g = 10 \text{m/s}^2$.

تصحيح

1-1 (I - I): خلال حركته على المستوى المائل يخضع الجسم S للقوى التالية:
 $\vec{P}$: وزنه. و $\vec{R}$: القوة المقرونة بتأثير سطح التماس وهي $\perp$ عليه لأن الاحتكاك مهم.



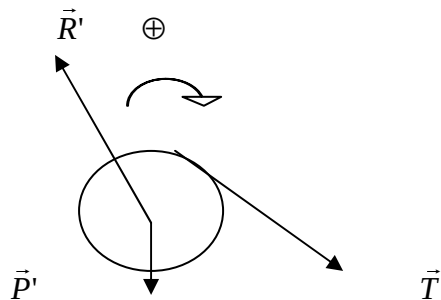
بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الجسم S نحصل على: $\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m \cdot \vec{a}_G$

بما أن حركة الجسم S مستقيمة فإن: $\vec{a}_G = a \cdot \vec{i}$ $\vec{i}$: المتجهة الواحدة التي توجه المحور $0x$.
 نسقط هذه العلاقة على المحور $0x$.
 $+ P \sin \alpha + 0 - T = m \cdot a$ ومنه نستخرج

$$T = mg \sin \alpha - ma \quad (1)$$

وبتطبيق العلاقة الأساسية للحركة على البكرة التي أثناء دورانها تخضع للقوى التالية:

$\vec{P}'$: وزن البكرة. و R' : القوة المقرونة بتأثير محور الدوران على البكرة. ثم $\vec{T}'$: توتر الخيط.
 نكتب العلاقة المعبرة عن القانون الثاني لنيوتن كما يلي: $M\vec{P}'_{\Delta} + MR'_{\Delta} + MT'_{\Delta} = J_{\Delta} \cdot \ddot{\theta}$ وباعتبار المنحى الموجب للدوران:



تصبح العلاقة السابقة كما يلي: $0 + 0 + T' \cdot r = J_{\Delta} \cdot \ddot{\theta}$

لأن: $\vec{R}'$ و $\vec{P}'$ تتقاطعان مع محور الدوران ومنه: $T' = \frac{J_{\Delta} \cdot \ddot{\theta}}{r}$ (2)

ولدينا من جهة $T = T'$ لأن الخيط المستعمل غير قابل للتمدد وذي كتلة مهملة ومن جهة أخرى $a = r \ddot{\theta}$ لأن الخيط

يدور بدون انزلاق على البكرة. إذن: $\ddot{\theta} = \frac{a}{r}$ إذن: $mg \cdot \sin \alpha - ma = \frac{J_{\Delta} \cdot a}{r^2}$ أي:

$$a = \frac{m.g.\sin \alpha}{m + \frac{J_{\Delta}}{r^2}}$$

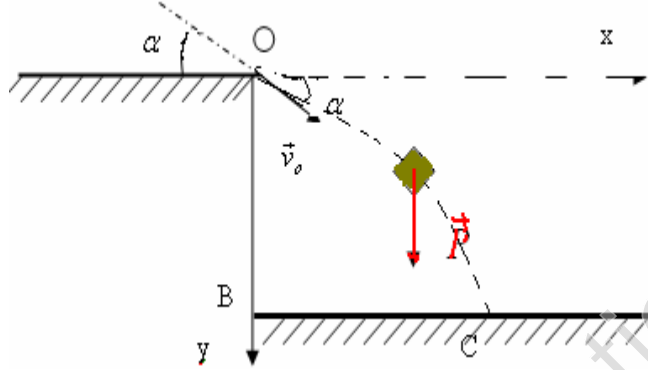
$$a = \frac{0,25.10.0,5}{0,25 + \frac{2,5.10^{-3}}{25.10^{-4}}} = \frac{1,25}{0,25 + \frac{25.10^{-4}}{25.10^{-4}}} = \frac{1,25}{1,25} = 1m.s^{-2} \text{ ت.ع.}$$

للجسم S مسار مستقيمي وتسارع ثابت إذن حركته مستقيمة متغيرة بانتظام.

2-1- بتطبيق العلاقة المستقلة عن الزمن بين الموضعين O و A :

$$v_0 = \sqrt{2.a.OA} = \sqrt{2 \times 1 \times 2} = 2m/s : \text{ وبما أن } v_A = 0 : v_O^2 - v_A^2 = 2.a.OA$$

(2) عندما يغادر الجسم S المستوى المائل في النقطة O يصبح خاضعا لتأثير وزنه $\vec{P}$ فقط.



* متجهة السرعة $\vec{v}_0$ في النقطة O :

وتكون $\vec{V}_0$ لها إحداثيتين في المعلم (0,x,y) زاوية α مع المحور $0x$.

$$V_{0x} = V_0 \cdot \cos \alpha$$

$$V_{0y} = V_0 \sin \alpha$$

العلاقة الأساسية للديناميك (القانون الثاني لنيوتن) تكتب كما يلي : $\vec{P} = m.\vec{a}_G$

* إسقاطها على المحور oy $\Leftrightarrow P = m.a_y$ أي $m.g = m.a_y \Leftrightarrow a_y = g$ الحركة مستقيمة متغيرة

بانتظام. وبذلك تكون المعادلة الزمنية للحركة حسب هذا المحور : $y = \frac{1}{2}a_y.t^2 + v_{0y}.t + y_0$ أي :

$$y = 5t^2 + t \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}g.t^2 + v_0 \sin \alpha \cdot t$$

* إسقاطها على المحور ox $\Leftrightarrow 0 = m.a_x$ أي : $a_x = 0$ الحركة مستقيمة منتظمة تتم بسرعة ثابتة

وهي : $v_x = v_{0x} = v_0 \cdot \cos \alpha$ إذن : المعادلة الزمنية للحركة حسب ox هي : $x = v_0 \cos \alpha \times t$

$$x = 1,73t$$

(2-2) لتكن t_c مدة السقوط الحر للجسم S . عند وصول الجسم S إلى النقطة C يكون لدينا :

$$0,75 = 5t_c^2 + t_c \quad \text{نعوض في (3) :} \quad y = y_c = y_B = OB$$

$$5t_c^2 + t_c - 0,75 = 0 \quad \text{أي :}$$

$$\text{هذه المعادلة لها حلين : } t_c = \frac{-1 \pm 4}{10} \quad \text{أي } 0,3 \text{ و } -0,5 \text{ وبما أن } t > 0 \text{ فإن : } t_c = 0,3s$$

تحديد المسافة BC

لدينا : $BC = x_c$ ونعوض في x المتغيرة t بمدة السقوط t_c :

$$x_c = 1,73t_c = 1,73.0,3 = 51,9m \approx 52m$$

(3) (1-3) نطبق العلاقة الأساسية للتحريك على البكرة بعد انفلات الحبل: فهي تخضع لوزنها $\vec{P}$ وتأثير محور

الدوران $\vec{R}$ بالإضافة إلى المزدوجة المقاومة ذات العزم $M_{\Delta} = -7,5 \times 10^{-2} N.m$

$$M_{\Delta} = J_{\Delta} \cdot \ddot{\theta}' \quad \text{أي:} \quad M_{\Delta} + M\vec{P}_{\Delta} + M\vec{R}_{\Delta} = J_{\Delta} \cdot \ddot{\theta}'$$

$$\omega_0 = \frac{v_o}{r} = \frac{2}{5 \cdot 10^{-2}} = 40 \text{ rad/s} \quad \text{في لحظة انفلات الحبل السرعة الزاوية للبكرة:}$$

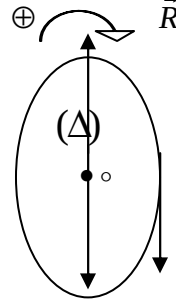
بتطبيق العلاقة المستقلة عن الزمن: $\omega^2 - \omega_0^2 = 2 \cdot \ddot{\theta}' \cdot \Delta\theta$ مع السرعة الزاوية عند التوقف $\omega = 0$ و

$$n = \frac{-\omega^2}{4 \cdot \pi \cdot \ddot{\theta}'} = 4,25 \quad \text{تمثل عدد الدورات التي أنجزتها الاسطوانة قبل التوقف.}$$

(1 II)

1-1) بتطبيق العلاقة الأساسية للتحريك على البكرة التي تخضع للقوى التالية:

$\vec{P}$: وزن البكرة و $\vec{R}$: تأثير محور الدوران Δ ثم $\vec{F}$: القوة المطبقة على البكرة.



$$\sum M\vec{F}_{\Delta} = J_{\Delta} \cdot \ddot{\theta}$$

$$M\vec{F}_{\Delta} + M\vec{P}_{\Delta} + M\vec{R}_{\Delta} = J_{\Delta} \cdot \ddot{\theta}$$

نختار منحى موجبا للدوران (انظر الشكل)

وبما أن عزم $\vec{P}$ وعزم $\vec{R}$ منعدمان لأن خطي تأثيرهما يتقاطعان مع محور الدوران (لا مقدرة لهما على إدارة البكرة) فإن العلاقة السابقة تصبح:

$$+ F \times d + 0 + 0 = J_{\Delta} \cdot \ddot{\theta} \quad (1)$$

مع: $J_{\Delta} = \frac{1}{2} m r^2$ و $[d = r]$ و $\left[F = \frac{m \cdot g}{2} \right]$ إذن العلاقة (1) تصبح:

$$\ddot{\theta} = \frac{10}{5 \cdot 10^{-2}} = 200 \text{ rad/s}^2 \quad \text{ت.ع:} \quad \ddot{\theta} = \frac{g}{r} \quad \text{ومنه:} \quad \frac{m \cdot g}{2} \cdot r = \frac{1}{2} m \cdot r^2 \cdot \ddot{\theta}$$

2-1) بما أن حركة البكرة دورانية متغيرة بانتظام متسارعة. المعادلة الزمنية للحركة تكتب كما يلي:

$$\theta = \frac{1}{2} \ddot{\theta} \times t^2 + \omega_0 t + \theta_0 \quad (a) \quad \text{في هذه العلاقة وحدة } \theta \text{ هي rad.}$$

عندما ينجز القرص دورة كاملة: $\theta = 2\pi$ ومن خلال المعطيات: $\theta_0 = 0$ و $\omega_0 = 0$ إذن العلاقة (a) تصبح:

$$\theta = \frac{1}{2} \ddot{\theta} \times t^2 \quad \text{ومنه}$$

$$t = \sqrt{\frac{2 \times \theta}{\ddot{\theta}}} = \sqrt{\frac{2 \times 2\pi}{200}} = 0,25 \text{ s}$$

3-1) من خلال دالة السرعة الزاوية: $\omega = \ddot{\theta} \cdot t + \theta_0$ مع $\theta_0 = 0$ إذن: $\omega = 200t$

وفي اللحظة $t = 0,25 \text{ s}$ نحصل على:

$$\omega = 200 \cdot 0,25 = 50 \text{ rad/s}$$

2) 1-2) لتكن ω_1 السرعة الزاوية لدوران القرص في لحظة انفصاله عن الخيط أي اللحظة التي تصير فيها سرعة القرص 10 دورات في الثانية. نعلم أن عدد الدورات في الثانية يمثل التردد N (لأن الدور T هي المدة التي

ينجز فيها القرص دورة واحدة. فبما أنه أصبح ينجز n دورة في 1 s إذن 1 دورة سينجزها في $\frac{1}{n}$ وهو الدور

T وهو مقلوب التردد وبالتالي عددا لدورات في الثانية n يعبر عن التردد N).

$$\omega = \frac{2\pi}{T_0} = 2 \cdot \pi \cdot N$$

إذن: $\omega_1 = 2\pi \cdot N_1 = 2 \times 3,14 \times 10 = 62,8 \text{ rad/s}$ ولتكن ω_F السرعة الزاوية للقرص عند التوقف $\omega_F = 0$.

بتطبيق العلاقة المستقلة عن الزمن على القرص بين لحظة انفصاله عن الخيط ولحظة توقفه عن الحركة :

$$(1) \quad \omega_F^2 - \omega_1^2 = 2.\ddot{\theta}'.\Delta\theta$$

مع $\Delta\theta = 2\pi n$ و $\omega_F = 0$ وهكذا (1) تصبح $-\omega_1^2 = 4.\ddot{\theta}'\pi.n$ إذن: $n = \frac{-\omega_1^2}{4.\pi.\ddot{\theta}'}$ ومن

خلال دالة السرعة الزاوية (باعتبار لحظة الانفصال هي اللحظة $t = 0$) لدينا: $\omega_F = \ddot{\theta}' \times t + \omega_1$ مع: بما أنه يتم

التوقف بعد 5 دقائق: $\ddot{\theta}' = \frac{-\omega_1}{t}$ مع (c) $\omega_1 = 62,8 \text{ rad/s}$ و $t = 5 \text{ mn} = 300 \text{ s}$ و $\omega_F = 0$:

نعوض (c) في (b) فنحصل على:

$$n = \frac{\omega_1.t}{4.\pi} = \frac{62,8 \times 300}{4 \times 3,14} = 1500 \text{ tr}$$

(2-2) بتطبيق ع.أ. للتحريك على البكرة في المرحلة الأخيرة (بعد انفصالها عن الخيط) نحصل على :

$$\omega_1 = 62,8 \text{ rad/s} \quad \ddot{\theta}' = \frac{-\omega_1}{t} \quad \text{مع:} \quad 0 + 0 + M = \frac{1}{2} m.r^2.\ddot{\theta}' \quad \Leftarrow \quad M\vec{P}_\Delta + M\vec{R}_\Delta + M = J_\Delta.\ddot{\theta}'$$

$$M = -0,105.m \times r^2 \quad \text{إذن:} \quad \ddot{\theta}' = \frac{-62,8}{300} \approx -0,21 \text{ rad/s}^2 \quad \text{و} \quad t = 5 \text{ mn} = 300 \text{ s} \quad \text{إذن:}$$

Sbiro abdelkrim