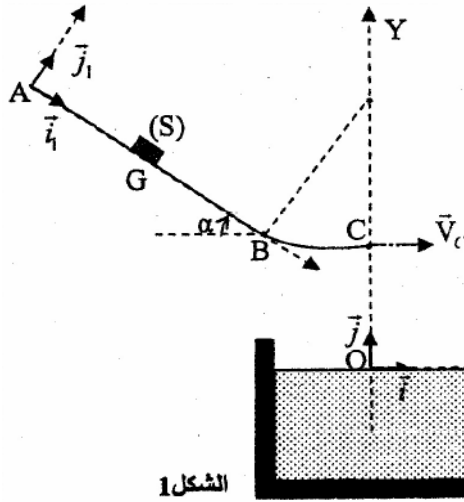


توجد المزلاقات في المسابح لتمكين السباحين من الانزلاق والغطس في الماء.
نمذج مزلقه مسبح بسكة ABC تتكون من جزء مستقيمي AB مائل بزاوية α بالنسبة للمستوى الأفقي ومن جزء دائري BC ، ونمذج السباح بجسم صلب (S) مركز قصوره G وكتلته m (الشكل 1).



المعطيات:

$$m = 70 \text{ kg} , g = 9,8 \text{ m.s}^{-2} , \alpha = 20^\circ , AB = 2,4 \text{ m}$$

1- دراسة الحركة على السكة AB :

ينطلق ، عند اللحظة $t = 0$ ، الجسم (S) من الموضع A ، الذي نعتبره منطبقا مع مركز قصوره G ، بدون سرعة بدئية فينزل بدون احتكاك على السكة AB . (الشكل 1)
ندرس حركة G في المعلم الأرضي $\mathcal{R}_1(A, \vec{i}_1, \vec{j}_1)$ الذي نعتبره غاليليا.

بتطبيق القانون الثاني لنيتون حد :

$$1.1 - \text{إحداثي التسارع } \vec{a}_G \text{ في المعلم } \mathcal{R}_1(A, \vec{i}_1, \vec{j}_1) . (0,5 \text{ ن})$$

$$1.2 - \text{سرعة } V_B \text{ في النقطة B} . (0,5 \text{ ن})$$

$$1.3 - \text{الشدة R للقوة التي يطبقها السطح AB على الجسم (S)} . (0,5 \text{ ن})$$

ندرس في بقية التمرين حركة G في المعلم الأرضي $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$ الذي نعتبره غاليليا. (الشكل 1)

2- دراسة حركة G في الهواء :

يصل الجسم (S) إلى النقطة C بسرعة أفقية منظما $V_C = 4,67 \text{ m.s}^{-1}$ ؛ فيغادرها عند لحظة نعتبرها أصلا جديدا للتواريخ.

يخضع الجسم (S) بالإضافة إلى وزنه إلى تأثير رياح اصطناعية نندج بقوة أفقية ثابتة تعبيرها: $\vec{f}_1 = -f_1 \cdot \vec{i}$

$$2.1 - \text{أوجد عند لحظة تاريخها t التعبير } v_x \text{ للمركبة الأفقية لمتجهة السرعة بدلالة : m و } V_C \text{ و } f_1 \text{ و t} . (0,5 \text{ ن})$$

$$2.2 - \text{عند اللحظة } t_D = 0,86 \text{ s} , \text{ يصل G إلى النقطة D التي توجد على سطح الماء، حيث تتعدم المركبة الأفقية لسرعته} .$$

$$a - \text{احسب } f_1 . (0,5 \text{ ن})$$

$$b - \text{حدد الارتفاع h للنقطة C عن سطح الماء} . (1 \text{ ن})$$

3- دراسة الحركة الرأسية للنقطة G في الماء:

يتابع الجسم (S) حركته في الماء بسرعة رأسية $\vec{V}$ حيث يخضع بالإضافة إلى وزنه إلى :

$$- \text{قوة احتكاك مائع نمذجها بمتجهة } \vec{f} \text{ تعبيرها في النظام العالمي للوحدات هو : } \vec{f} = 140 \cdot V^2 \cdot \vec{j}$$

$$- \text{دافعة أرخميدس } \vec{F}_A \text{ شدتها : } F_A = 637 \text{ N}$$

نعتبر لحظة دخول الجسم (S) في الماء أصلا جديدا للتواريخ.

$$3.1 - \text{بين أن السرعة } V(t) \text{ للنقطة G تحقق المعادلة التفاضلية التالية : } \frac{dV(t)}{dt} - 2V^2 + 0,7 = 0 . (1 \text{ ن})$$

$$3.2 - \text{أوجد قيمة السرعة الحدية } V_e . (0,5 \text{ ن})$$

$$3.3 - \text{بالاعتماد على الجدول أسفله وباستعمال طريقة أولير ، حدد القيمتين } V_{i+1} \text{ و } a_{i+1} . (1 \text{ ن})$$

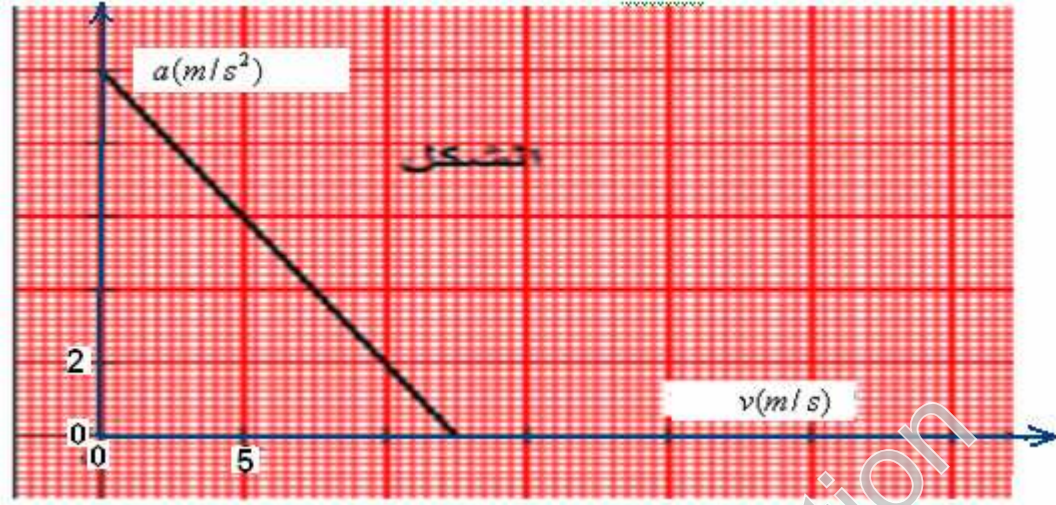
t (s)	V (m.s ⁻¹)	a (m.s ⁻²)
t _i = 1,8.10 ⁻¹	-1,90	6,52
t _{i+1} = 1,95.10 ⁻¹	-1,80	a _{i+1}
t _{i+2} = 2,1.10 ⁻¹	V _{i+2}	5,15

(2) التمرين الثاني = السقوط الرأسى لمظلي مع تجهيزه في الهواء:

يسقط مظلي كتلته مع تجهيزه $m = 100 \text{ kg}$ سقوطا شاقوليا انطلاقا من نقطة O بالنسبة لمعلم أرضي بدون سرعة بدئية . يخضع أثناء

سقوطه إلى قوة مقاومة الهواء تعبيرها $f = Kv$. يعطي المبيان أسفله المنحنى الممثل لتغيرات تسارع المظلي بدلالة سرعته v.

- 1- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن بين أن المعادلة التفاضلية لحركة المظلي تكتب كما يلي : $\frac{dv}{dt} = Av + B$ حيث A و B ثابتان يطلب تحديد تعبير كل منهما.
- 2- حدد مبيانيا : أ- قيمة شدة مجال الجاذبية الأرضي في مكان السقوط.
ب- شدة السرعة الحدية للمظلي v_c .
- 3- تتميز الحركة السابقة بالمقدار $\frac{K}{m}$ حدد وحدة هذا المقدار واحسب قيمته من المنحنى.
- 4- احسب قيمة الثابتة K.
- 5- مثل كيفيا تغيرات سرعة المظلي بدلالة الزمن .
- 6- ما النظام المتحقق عند اللحظة $t=12,5s$ علل جوابك .



3) التمرين الثالث = سقوط جسم صلب كروي الشكل في الهواء :

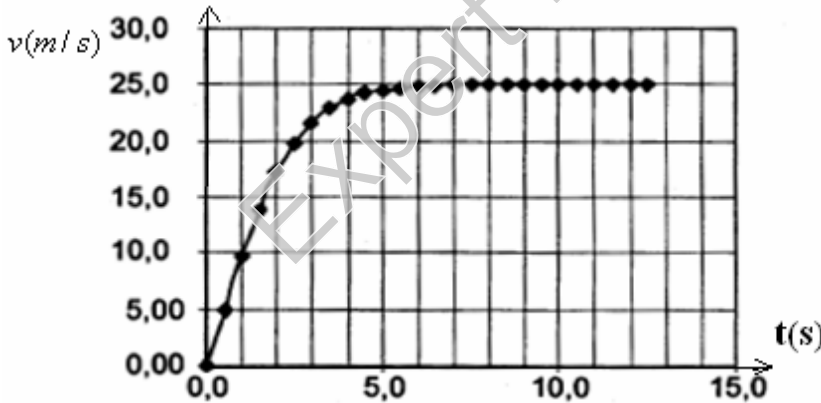
جسم صلب كروي الشكل قطره $d=3cm$ وكتلته $m=13g$ يسقط رأسيا في الهواء انطلاقا من نقطة O توجد في ارتفاع $h=1500m$ من سطح الأرض بدون سرعة بدنية.

المعطيات : $g = 9,8m/s^2$ ، الكتلة الحجمية للهواء $\rho_{air} = 1,3kg/m^3$ حجم كرة شعاعها r : $V = \frac{4}{3}\pi.r^3$.

- علما أن الجسم خلال سقوطه يخضع للتأثيرات التالية : وزنه $\vec{P}$ ، دافعة أرخميدس $\vec{F}_A$ و قوة الاحتكاك $\vec{f}$ بحيث $f = kv^2$.
- 1- بين أن دافعة أرخميدس مهمة أمام وزن الجسم .
 - 2- بإهمال دافعة أرخميدس :

1-2- بين أن المعادلة التفاضلية لحركة الجسم تكتب على النحو التالي : $\frac{dv}{dt} = A - B.v^2$.

2-2- يعطي الجدول أسفله بعض قيم سرعة الجسم وتسارعه بدلالة الزمن . باعتماد النتائج المحصل عليها باستعمال طريقة أولير حيث قيمة خطوة الحساب المعتمدة $\Delta t = 0,5s$ نعطي المنحنى الممثل لتغيرات سرعة الجسم بدلالة الزمن.



t (s)	v(m.s ⁻¹)	a (m.s ⁻²)
0,00	0,00	9,80
0,50	4,90	9,43
1,00	9,61	8,36
1,50	13,8	6,83
2,00	17,2	a ₄
2,50	v ₅	3,69
3,00	21,6	2,49

1-2-2 - أعط قيمة كل من التسارع البدني a_0 والسرعة الحدية للجسم v_c وثابتة الزمن τ المميز للكرة .

2-2-2 - أعط تعبير التسارع البدني a_0 والسرعة الحدية للجسم v_c بدلالة A و B.

3-2-2 - استنتج قيمة كل من A و B.

3-2 - باستعمال طريقة أولير احسب a₄ و v₅.

4) التمرين الرابع = موضوع باكالوريا مغربية ، مسلك العلوم الرياضية الدورة العادية لسنة 2010 :

فيزياء 3 : (5,75 نقطة) الجزءان الأول و الثاني مستقلان

الجزء الأول (2,75 نقطة) : السقوط الرأسي لجسم صلب

يخضع كل جسم صلب مغمور في مائع إلى دافعة أرخميدس ، وإذا كان هذا الجسم في حركة إزاحة داخل المائع فإنه يخضع كذلك إلى قوة احتكاك مائع.

يهدف هذا التمرين إلى دراسة تطور سرعة كرتين (a) و (b) من الزجاج متجانستين ليس لهما نفس الشعاع، توجدان في حركة إزاحة داخل زيت بسرعة نسبيا صغيرة .

معطيات :	الكتلة الحجمية للزجاج	$\rho = 2600 \text{ kg.m}^{-3}$
	الكتلة الحجمية للزيت	$\rho_0 = 970 \text{ kg.m}^{-3}$
	لزوجة الزيت	$\eta = 8,00.10^{-2} \text{ N.m}^{-2}.s$
	تسارع الثقالة	$g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$
	تعبير حجم كرة شعاعها r	$V = \frac{4}{3}\pi.r^3$

نحرر، عند نفس اللحظة $t = 0$ ، الكرتين (a) و (b) عند سطح الزيت الموجود في أنبوب شفاف أسطواناني رأسي . ارتفاع الزيت في الأنبوب هو $H = 1,00 \text{ m}$ ، الشكل (1) .

1-دراسة حركة الكرة (a) .

ندرس حركة الكرة (a) في المعلم $(O, \vec{i})$ المرتبط بالأرض . تخضع الكرة أثناء حركتها داخل الزيت إلى :

- دافعة أرخميدس $\vec{F} = -\rho_0.V.g.\vec{i}$

- قوة الاحتكاك المائع $\vec{f} = -6\pi.\eta.r.v.\vec{i}$ حيث v سرعة الكرة ؛

- وزنها $\vec{P} = m.g$.

نرمز للزمن المميز لحركة الكرة (a) بـ τ ؛ و نعتبر أن سرعة الكرة تبلغ القيمة الحدية v_f بعد تمام المدة الزمنية 5τ .

1.1- أثبت المعادلة التفاضلية $\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = C$ لحركة الكرة (a)

مع تحديد تعبير الثابتين τ و C ، احسب τ ، علما أن $r = 0,25 \text{ cm}$.

1.2- احسب قيمة السرعة الحدية v_f للكرة (a) .

2- دراسة مقارنة لحركتي الكرتين (a) و (b)

شعاع الكرة (b) هو $r' = 2r$.

2.1- حدد ، معلا جوابك ، الكرة التي تستغرق أطول مدة زمنية لتبلغ سرعتها الحدية .

2.2- خلال النظام الانتقالي تقطع :

- الكرة (a) المسافة $d_1 = 5,00 \text{ cm}$ ؛

- الكرة (b) المسافة $d_2 = 80 \text{ cm}$.

نهمل شعاعي الكرتين r و r' أمام ارتفاع الزيت H .

احسب المدة الزمنية الفاصلة بين وصول الكرتين (a) و (b) إلى قعر الأنبوب .

(5) التمرين الخامس = موضوع باكالوريا مغربية : نمذجة قوة احتكاك مائع . شعبة العلوم الرياضية الدورة العادية 2008 :
يهدف هذا التمرين إلى نمذجة قوة الاحتكاك المائع المطبقة من طرف الغليسيرول على جسم صلب وذلك بدراسة حركة السقوط الرأسي لكلمة فلزية كتلتها m و شعاعها r داخل الغليسيرول .

معطيات : - شعاع الكلمة : $r = 1 \text{ cm}$ ؛ حجم الكلمة : $V = \frac{4}{3}\pi.r^3$ ؛

- الكتلة الحجمية :

* للغلزال الذي تتكون منه الكلمة : $\rho_1 = 2,7.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ ؛

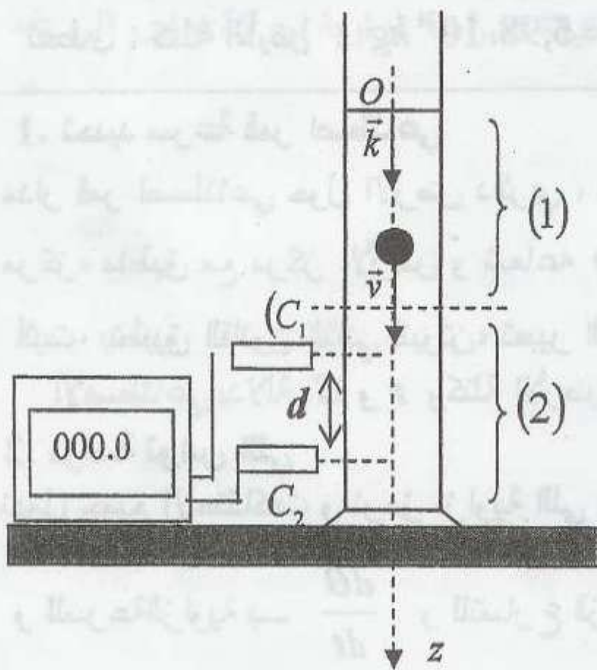
* الغليسيرول : $\rho_2 = 1,26.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ ؛

- تسارع الثقالة : $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$.

نذكر أن شدة دافعة أرخميدس المطبقة على الكلمة المغمورة كليا في الغليسيرول هي

$$F = \rho_2.V.g$$

ننمذج قوة الاحتكاك التي تخضع لها الكلمة أثناء السقوط داخل الغليسيرول بـ $\vec{f} = -9\pi.r.v^n.\vec{k}$ حيث n عدد صحيح و v سرعة مركز قصور الكلمة .



عند لحظة نعتبرها أصلا للتواريخ ($t_0 = 0$)، نحرر الكرة بدون سرعة بدئية من نقطة O أصل المحور الرأسى $(O, \bar{k})$ الموجه نحو الأسفل، فتتم حركتها داخل الغليسيرول الموجود في إناء زجاجي، على مرحلتين:

• (1): مرحلة النظام البدئي بين لحظتين t_0 و t_1 حيث تتزايد سرعة الكرة.

• (2): مرحلة النظام الدائم انطلاقا من اللحظة t_1 حيث تأخذ سرعة الكرة قيمة حدية ثابتة v_ℓ . يمكن الجهاز المكون من ميقت وخليتين (C_1) و (C_2) من قياس المدة الزمنية Δt التي تستغرقها الكرة لقطع المسافة $d = 20 \text{ cm}$ خلال المرحلة (2) (انظر الشكل جانبه).

1. حدد قيمة السرعة الحدية v_ℓ علما أن $\Delta t = 956 \text{ ms}$.

2. بتطبيق القانون الثاني لنبرتن، بين أن المعادلة التفاضلية التي تحققها السرعة v لمركز قصور الكرة داخل السائل تكتب على الشكل:

$$\frac{dv}{dt} + A.v^n = B \quad \text{مع} \quad A = \frac{27}{4\rho_1 r^2} \quad \text{و} \quad B = g \left(\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1} \right)$$

3. أوجد، انطلاقا من المعادلة التفاضلية، تعبير v^n بدلالة ρ_1 و ρ_2 و r و g .

4. استنتج العدد n .

(6) لتمرين السادس = سقوط قطرة ماء في الهواء:

قطرة ماء نفرضها كروية الشكل ذات شعاع R تسقط رأسا من الهواء بدون سرعة بدئية، وتخضع خلال حركتها إلى قوة احتكاك $\vec{f}$ معاكسة لسنجة سرعتها $\vec{v}$ وذات قيمة $f = k.v$ ، حيث k ثابتة. المعطيات:

الكتلة الحجمية للماء: $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$.

الكتلة الحجمية للهواء: $\rho_{\text{air}} = 1.3 \text{ kg/m}^3$.

1- بين أن دافعة أرخميدس $\vec{P}_A$ مهملة أمام وزن القطرة $\vec{P}$ يعطى: $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

2- أوجد المعادلة التفاضلية للحركة و اكتبها على الشكل: $\frac{dv}{dt} + Av = B$ حيث a و b ثابتان.

3- ما هو الشرط اللازم لبلوغ السرعة الحدية؟

4- أعط تعبير السرعة الحدية v_ℓ بدلالة k ، g ، m .

5- تحقق أن: $v = v_\ell (1 - e^{-\frac{k}{m}t})$ هو حل للمعادلة التفاضلية السابقة.

6- أوجد قيمة الثابتة k ، علما أن: $R = 25 \mu\text{m}$ ، $v_\ell = 7.56 \text{ cm/s}$.

(7) التمرين السابع = نمذجة قوة الاحتكاك المائع

نحرر في لحظة تاريخها $t = 0 \text{ s}$ وبدون سرعة بدئية في مخبر يحتوي على زيت محرك السيارة كتلته الحجمية $\rho = 0.91 \text{ g/cm}^3$ ، كرة كتلتها $m = 35 \text{ g}$ وحجمها $V = 33.5 \text{ cm}^3$.

نعطي شدة قوة الاحتكاك المطبقة من طرف السائل على الجسم: $f = K.v$.

نستعمل تركيب تجريبي مرتبط بحاسوب لكي يمكننا من تتبع حركة الكرة في السائل فنحصل على المنحنى الممثل لتغيرات سرعة مركز قصور الكرة بدلالة الزمن t أي $v = f(t)$ (الشكل 7).

ندرس حركة الجسم S بالنسبة لمرجع مرتبط بالمختبر الذي نعتبره غاليليا ونأخذ كذلك المحور Oz موجه نحو الأسفل.

1- ارسم على تبيانة متجهات القوى المطبقة على الكرة.

2- بتطبيق القانون الثاني لنبرتن، بين أن المعادلة التفاضلية لحركة الكرة بالنسبة للمرجع المرتبط بالمختبر تكتب على الشكل التالي:

$\frac{dv}{dt} = A - B.v$ مع تحديد تعبري كل من A و B .

3- تحقق أن الثابتة $A = 1.29 \text{ m/s}^2$ نعطي $g = 10 \text{ m/s}^2$.

4- باستعمال المبيان، عين قيمة السرعة الحدية واستنتج قيمة الثابتة B وحدد وحدتها.

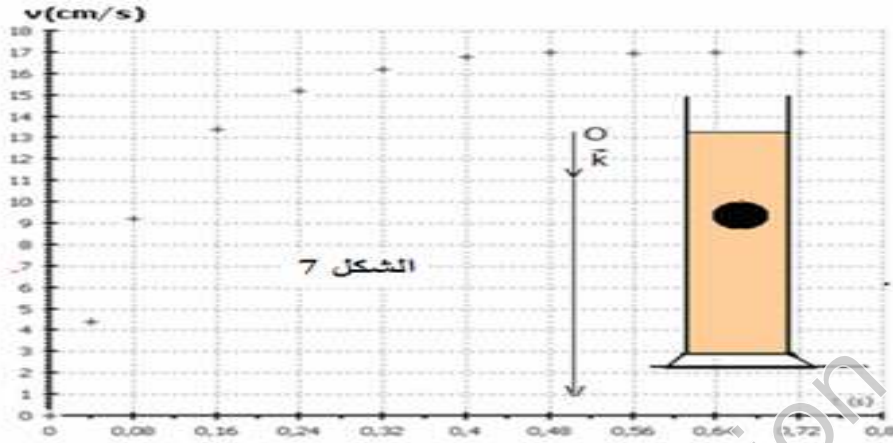
5- بمعرفة القيمتين السابقتين A و B ، تمكن طريقة أولير من حساب بكيفية تقريبية قيمة سرعة الجسم بدلالة الزمن وذلك باستعمال العلاقتين: $v_{i+1} = v_i + a_i \Delta t$ و $a_i = A - B \cdot v_i$ نحصل على النتائج المدونة في الجدول التالي:

i	0	1	2	3	4	5	6	7
t_i (s)	0	0,08	0,16	0,24	0,32	0,40	0,48	0,56
v_i (m/s)		0,102	0,143		0,165	0,167	0,169	0,169
$a_i = dv_i/dt$ (m/s ²)		0,51	0,20		0,03	0,02	0,00	0,00

1-5- ماقيمة الخطوة Δt المستعملة في الحساب

2-5- باستعمال طريقة أولير أتمم الجدول أعلاه

3-5- تحقق من أنه تم نمذجة قوة الاحتكاك بكيفية صحيحة.



(8) التمرين الثامن : حركة صعود فقاعة من الهواء في الماء :

في عمق مسبح حيث $z_0 = -3,0m$ أحدث غطاس فقاعة صغيرة من الهواء عند اللحظة $t = 0s$. نقبل أن الفقاعة كروية الشكل .

بدئيا يكون شعاع الفقاعة $r(z_0) = r_0 = 0,50mm$.

درجة حرارة الماء والهواء الموجود في الفقاعة ثابتة : $T_0 = 300K$.

ضغط الماء في حوض المسبح يتغير مع العمق z من خلال العلاقة التالية : $p_{eau}(z) = p_{atm} - \rho g z$:

$z=0$ سطح الماء على الضغط $p_{atm} = 1,0 \cdot 10^5 Pa$

$\rho = 1,0 \cdot 10^3 kg / m^3$ الكتلة الحجمية للماء ،

$g = 9,8m / s^2$ شدة مجال الثقالة .

ضغط الهواء الموجود في الفقاعة يساوي ضغط الماء في

العمق نفسه أي أن $p_{air}(z) = p_{eau}(z)$.

نعطي ثابتة الغازات الكاملة : $R = 8,314 J / (mol \cdot K)$.

1 - نفترض أن الهواء الموجود في الفقاعة غاز كامل ، أوجد

تعبير شعاع الفقاعة $r(z)$ بدلالة العمق z .

2 - أحسب كمية مادة الهواء الموجودة في الفقاعة n_{air} .

3 - أحسب شعاع الفقاعة عند وصولها إلى سطح الماء .

نهمل تغير شعاع الفقاعة ، إذا كان التغير أصغر من 10%)

بالقيمة المطلقة (من القيمة البدئية .

هل يمكن إهماله ؟

4 - إذا كانت الكتلة المولية للهواء $M(air) = 29g / mol$ ، أحسب الكتلة m للفقاعة ثم أعط مميزات

المتجهة $\vec{P}$ وزن الفقاعة .

5 - أعط مميزات دافعة أرخميدس $\vec{F}_A$ التي تخضع إليها الفقاعة بدلالة الشعاع r_0 .

6 - تخضع الفقاعة كذلك إلى قوة الاحتكاك المائع وهي تكتب على الشكل التالي : $\vec{f} = -6\pi\eta r_0 \vec{v}$:

بحيث أن $\eta = 1,0 \cdot 10^{-3} Pa \cdot s$ لزوجة الماء و r_0 شعاع الفقاعة و $\vec{v}$ متجهة سرعتها .

6 - 1 مثل على تبيان القوى المطبقة على الفقاعة . (بدون سلم)

6 - 2 أثبت المعادلة التفاضلية التي تحققها سرعة الفقاعة خلال حركتها.

7 - حل المعادلة التفاضلية هو كالتالي : $v(t) = v_l (1 - e^{-t/\tau})$:

باعتبار أن $A + Be^x$ منعدمة بالنسبة للقيم x إذا كانت $A = B = 0$ ، حدد تعابير المقادير التالية :

v_l و τ باعتبار أن $v(t)$ حلا للمعادلة التفاضلية .

8 - حدد السرعة القصوى للفقاعة .

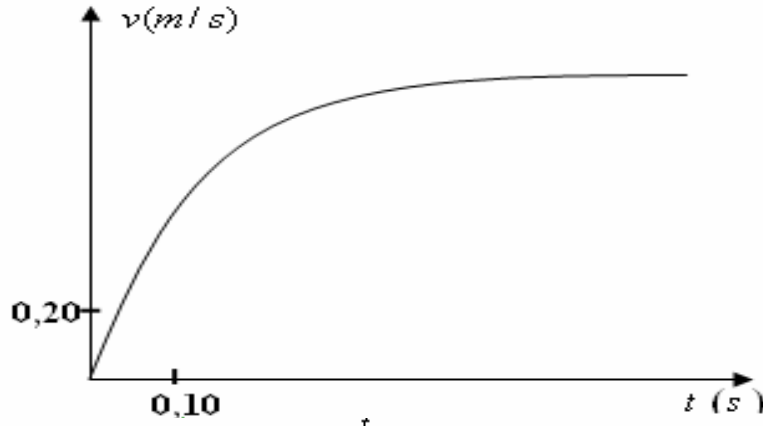
(9) التمرين التاسع: حركة سقوط كرة معدنية في مائع:

تمكن المعادلة التفاضلية $\frac{dx}{dt} + \alpha \cdot x = \beta$ من وصف عدد كبير من الظواهر الفيزيائية المتغيرة خلال الزمن: الشدة، التوتر، السرعة....

هذه المعادلة رياضيا تقبل حلين هما:

$$\textcircled{1} \quad x(t) = \frac{\beta}{\alpha} \cdot (1 - e^{-\alpha \cdot t}) \quad \text{إذا كان } \beta \neq 0 \quad \text{و} \quad \textcircled{2} \quad x(t) = X_0 \cdot e^{-\alpha \cdot t} \quad \text{إذا كان } \beta = 0.$$

تمت دراسة حركة سقوط كرة معدنية، كتلتها m ، في مائع كتلته الحجمية ρ_f بواسطة برمجية خاصة لتتبع تطور سرعة مركز القصور الكرة بدلالة الزمن، فمكنت من الحصول على المنحنى التالي:



1- استثمر معادلة المنحنى. علما أن المعادلة الرياضية المرفقة بالمنحنى تكتب كما يلي: $v(t) = 1,14 \cdot (1 - e^{-\frac{t}{0,132}})$ ، حيث $v(t)$ معبر عنها ب: $m \cdot s^{-1}$. وهذه المعادلة توافق الحل رقم (1).

أ- عين قيمة كل من α و النسبة $\frac{\beta}{\alpha}$ أعط بدون تعليل، وحدة النسبة $\frac{\beta}{\alpha}$.

ب- أثبت أن المعادلة التفاضلية التي تقبل كحل المعادلة $v(t)$ تحقق الكتابة العددية التالية: $\frac{dv}{dt} + 7,58v = 8,64$.

2- دراسة الظاهرة الفيزيائية:

أ- أوجد القوى المطبقة على الكرة، ثم مثلها على شكل.

ب- طبق القانون الثاني لنيوتن على المجموعة المتمثلة في الكرة.

3- الكرة المستعملة في هذه الدراسة فولاذية، كتلتها $m = 32g$ وحجمها V . تسارع الجاذبية في مكان الدراسة: $g = 9,80 m \cdot s^{-2}$. نعطي تعبير قوة الاحتكاك المطبقة على الكرة: $\vec{f} = -k \cdot \vec{v}$.

أ- باستعمال محور رأسي موجه نحو الأسفل، أثبت أن المعادلة التفاضلية المتعلقة بالمقدار المتغير $v(t)$ تحقق: $\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = \left(1 - \frac{\rho_f \cdot V}{m}\right) \cdot g$.

ب- استنتج التعبير الحرفي للمعاملين α و β في المعادلة (1).

ج- ما قيمة المعامل β إذا كانت دافعة أرخميدس مهمة؟ باستعمال المعادلة في السؤال 1- ب، بين أن هذه القوة يجب أخذها بعين الاعتبار.

(11) التمرين العاشر: سقوط كرة معدنية في مائع:

لدراسة حركة سقوط كرة معدنية في ماء سكري بحيث تترك الكرة، المغمورة كلياً في الماء، بدون سرعة بدنية لتسقط رأسياً. تم تصوير الحركة بواسطة كاميرا رقمية ثم معالجة الصورة بواسطة برنامج مكن من تحديد مواضع مركز قصورها في لحظات مختلفة. التسجيل أظهر أن الكرة تبلغ في فترة وجيزة السرعة الحدية $v_\ell = 0,8 m/s$.

1- أوجد القوى المطبقة على الكرة.

2- نعتبر أن شدة قوة الاحتكاك التي يطبقها الماء السكري على الكرة تتناسب مع السرعة v : $f = -kv$.

1-2- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن أوجد المعادلة التفاضلية للحركة. بين أن هذه المعادلة يمكن كتابتها على الشكل: $\frac{dv}{dt} = A - B \cdot v$ حيث

A و B ثابتين.

2-2- أعط تعبير كل من A و B بدلالة المعطيات.

3-2- احسب قيمة الثابتة A وحدد وحدة قياسها.

3- أوجد تعبير السرعة الحدية التي تكتسبها الكرة. و استنتج قيمة الثابتة B.

4- بين أن: $v_y = v_\ell + C \cdot e^{-\alpha \cdot t}$ حل للمعادلة التفاضلية حدد قيمة C واستنتج تعبير قيمة τ .

كتلة الكرة: $m = 1,7 \cdot 10^{-2} kg$ حجم الكرة: $V = 2,1 \cdot 10^{-6} m^3$ الكتلة الحجمية للماء السكري $\rho = 1,2 \cdot 10^3 kg \cdot m^{-3}$ $g = 9,8 N/kg$

12) التمرين الحادي عشر: سقوط كرة معدنية في مانع :

يقفز مضلي ولوازمه من طائرة توجد على ارتفاع h من سطح الأرض . كتلة المضلي ولوازمه m ونأخذ قيمة شدة مجال الثقالة $g=9,81m/s^2$.

نقبل أن مجموع القوى المطبقة من طرف الهواء على المضلي يمكن نمذجتها بقوة الاحتكاك $f = k.v^2$ بحيث أن $k = 0,78SI$.

1 _ انطلاقا من معادلة الأبعاد حدد وحدة الثابتة k في النظام العالمي للوحدات (SI) .

2 _ أوجد المعادلة التفاضلية خلال سقوط المضلي ولوازمه باعتبار المحور الرأسي $(O, \vec{k})$ وموجها نحو الأسفل . نهمل دافعة أرخميدس .

3 _ لتحديد تغير السرعة خلال الزمن t نستعمل طريقة أولير حيث نختار خطوة الحساب $\Delta t = 0,5s$.

3 _ 1 لتكن v_n السرعة في اللحظة t_n و v_{n+1} السرعة في اللحظة $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ ، بين أن المعادلة

التفاضلية السابقة يمكن أن تكتب على الشكل التالي :

$$v_{n+1} = v_n + A - B.v_n^2 \quad \text{حيث } A = 4,9SI \quad \text{و} \quad B = 1,95.10^{-3}SI$$

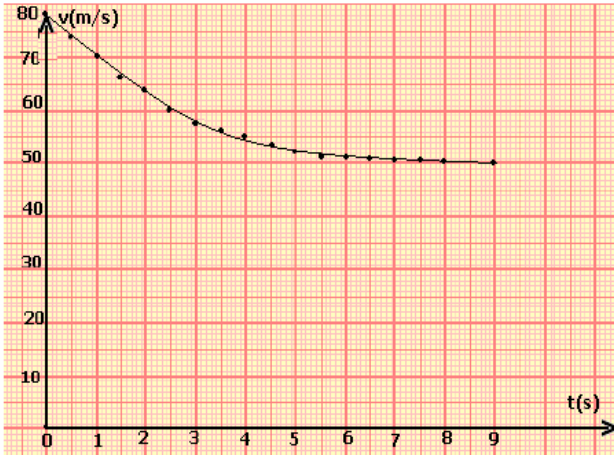
حدد بدقة وحدة الثابتين A و B في النظام العالمي للوحدات .

3 _ 2 باستعمال المبيان جانبه والذي يمثل تغيرات السرعة v بدلالة الزمن t التي تم حسابها بواسطة العلاقة السابقة ، عين :

أ _ رتبة قدر المدة اللازمة ليصل المضلي ولوازمه إلى السرعة الحدية ،

ب _ قيمة السرعة الحدية ، وعبر عنها بالوحدة km/h

ج _ قيمة الزمن المميز للحركة .

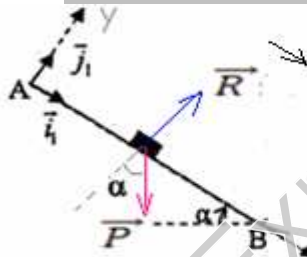


SBIRO Abdelkrim Lycée Agricole oulad-taima région d'Agadir Maroc

Mail : sbiandou@yahoo.fr

pour toute observation contactez moi

1) تصحيح التمرين الأول : موضوع باكالوريا مغربية : علوم فيزيائية الدورة العادية 2010



1- المجموعة المدروسة الجسم (S)

■ جرد وتمثيل القوى :

$\vec{P}$: وزن الجسم .

$\vec{R}$: تأثير سطح التماس وهي عمودية على السطح لأن التماس يتم بدون احتكاك .

■ تطبيق القانون الثاني لنيوتن : $\vec{P} + \vec{R} + m.\vec{a}_G$

■ اختيار معلم مناسب : نعتبر المعلم $(A, \vec{i}_1, \vec{j}_1)$ نعتبره غاليليا .

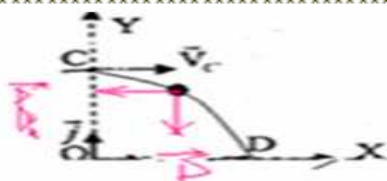
بالإسقاط على المحور ox : $+P \sin \alpha + 0 = m.a_x \Leftrightarrow m.g \sin \alpha = m.a_x \Leftrightarrow a_x = g \sin \alpha$

بالإسقاط على المحور oy : $-P \cos \alpha + R = 0 \Leftrightarrow R = P \cos \alpha$ لأنه لا حركة للجسم حسب oy .

1-2 تطبيق العلاقة المستقلة عن الزمن بين 0 و B : $v_B^2 - v_0^2 = 2.a_x.(x_B - x_0)$ أي $v_B^2 = 2.a_x.AB$ لأن $v_0 = 0$

$$v_B = \sqrt{2.a_x.AB} = \sqrt{2g(\sin 20^\circ) \times 2,4} = 4m/s \quad \text{ومنه}$$

$$R = P \cos \alpha = mg \cos 20^\circ = 70 \times 9,8 \cos 20^\circ = 644,6N \quad 1-3$$



2-1-2 المجموعة المدروسة : الجسم S

■ جرد القوى : $\vec{P}$: وزن الجسم .

$\vec{f}_1$: تأثير الرياح الاصطناعية .

■ تطبيق القانون الثاني لنيوتن : $\vec{P} + \vec{f}_1 = m.\vec{a}_G$

(1)

بالإسقاط (1) على ox : $0 - f_1 = m.a_x \Leftrightarrow a_x = -\frac{f_1}{m}$ أي : ثابتة $\frac{dv_x}{dt} = \frac{f_1}{m}$ $\Leftrightarrow v_x = -\frac{f_1}{m}t + k$ وبما أن عند اللحظة

$$v_x = -\frac{f_1}{m}t + v_c$$

$t=0$ ، $v_x = v_c$ فإن الثابتة $k = v_c$ وبالتالي :

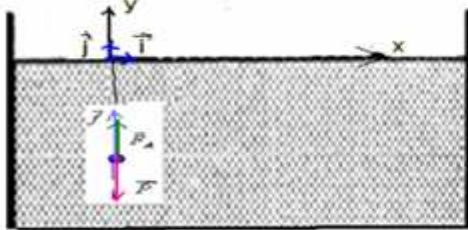
2-2 أ- في النقطة D تنعدم v_x عند اللحظة $t=t_0$ $\Leftrightarrow 0 = -\frac{f_1}{m}t_c + v_c \Leftrightarrow t=t_0$ عند اللحظة $t=t_0$ $\Leftrightarrow f_1 = \frac{mv_c}{t_c} = \frac{70 \times 4,67}{0,86} \approx 380N$

ب- بإسقاط (1) المحور oy: $P+0 = m.a_y$ أي $a_y = -g$ أي ثابتة $\frac{dv_y}{dt} = -g$ $\Leftrightarrow v_y = -gt + k'$ وبما أن عند

اللحظة $t=0$ ، $v_y = 0$ فإن الثابتة $k'=0$ وبالتالي: $v_y = -gt$ أي: $\frac{dy}{dt} = -gt$ ومنه: $y = -\frac{1}{2}gt^2 + k''$

باستعمال الشروط البدئية: عند $t=0$ لدينا $y=h$ $\Leftrightarrow k''=h$ وبالتالي: $y = -\frac{1}{2}gt^2 + h$

عند وصول الجسم للنقطة D: $y=0$ أي: $0 = -\frac{1}{2}gt_D^2 + h$ $\Leftrightarrow h = \frac{1}{2}gt_D^2 = \frac{1}{2} \times 9,9 \times (0,86)^2 = 3,62m$



3- 3-1 المجموعة المدروسة: الجسم S
جهد القوى: يخضع الجسم S للقوى التالية:

$\vec{P} = -m.g.\vec{j}$ وزنه

$\vec{F}_A = 637\vec{j}$ دافعة أرخميدس

$\vec{f} = 140v^2\vec{j}$ قوة الاحتكاك

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن: $\vec{P} + \vec{F}_A + \vec{f} = m.\vec{a}_G$

بالإسقاط على المحور oy: $-P + F_A + f = m.a$ أي: $-mg + F_A + 140.v^2 = m.\frac{dv}{dt}$

$\frac{dv}{dt} - 2v^2 + 0,7 = 0 \Leftrightarrow 70\frac{dv}{dt} - 140.v^2 + 49 = 0 \Leftrightarrow -70 \times 9,8 + 637 + 140.v^2 = 70\frac{dv}{dt} \Leftrightarrow$

3-2 نحصل على السرعة الحدية عندما يتحقق النظام الدائم بحيث تصبح $\frac{dv}{dt} = 0 \Leftrightarrow v = v_c$ ثابتة

$v_c = \sqrt{\frac{0,7}{2}} = 0,59m/s \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = 2v_c^2 - 0,7 = 0$

3.3 طريقة أولير: $a_{i+1} = 2V_{i+1}^2 - 0,7 = 2 \cdot (1,80)^2 - 0,7 = 5,78m/s^2$

$V_{i+2} = V_{i+1} + a_{i+1}(t_{i+2} - t_{i+1}) = -1,80 + 5,78(0,21 - 0,195) = -1,71m/s$

(2) تصحيح التمرين الثاني سقوط مظلي في الهواء:

-1

المجموعة المدروسة -المظلي وتجهيزه-

جهد وتمثيل القوى: $\vec{P}$: وزن المجموعة. $\vec{f}$: مقاومة الهواء.

تطبيق القانون الثاني لنيوتن: $\vec{f} + \vec{P} = m.\vec{a}_G$

الاسقاط على المحور (O,z): $P - f = m.\frac{dv_z}{dt}$

أي: $m.g - k.v = m.\frac{dv}{dt} \Leftrightarrow$ المعادلة التفاضلية للحركة

$\frac{dv}{dt} = Av + B$ وهي على الشكل $\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}.v + g$

ومنه: $A = -\frac{k}{m}$ و $B = g$

2- أميبانيا التسارع دالة تألفية معادلتها على الشكل: $a=A.v+B$ نجد مبيانيا: $B=10m/s^2$ ونعلم أن $B=g$ إذن $g=10m/s^2$

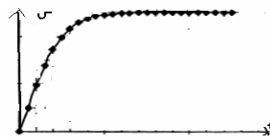
ب- نحصل على السرعة الحدية عندما يتحقق النظام الدائم أي $\frac{dv}{dt} = 0$ أي $a=0$ وهي توافق نقطة تقاطع المستقيم مع محور السرعة v

$v_c = 12,5m/s$

3-بتحديد قيمة المعامل الموجه: $A = \frac{\Delta a}{\Delta v} = \frac{10-6}{0-5} = -0,8$ ومنه $\frac{k}{m} = 0,8 \Leftrightarrow A = -\frac{k}{m} = -0,8$

4 - نحصل على السرعة الحدية عندما يتحقق النظام الدائم أي $\frac{dv}{dt} = 0 \Leftrightarrow -\frac{k}{m}.v_c + g = 0 \Leftrightarrow v_c = \frac{g.m}{k}$ ومنه:

$\frac{dv}{dt} = -0,8.v + 10$ والعلاقة السابقة تصبح: $k = \frac{g.m}{v_c} = \frac{10 \times 100}{12,5} = 80$



6- نعلم ان حل المعادلة التفاضلية : $\frac{dv}{dt} = Av + B$ هي : $v = v_c(1 - e^{-\frac{k}{m}t})$ وعند اللحظة $t=12,5s$ و $\frac{k}{m} = 0,8$

(3) تصحيح التمرين الثالث : سقوط جسم صلب في الهواء :
ومن ثم فإن النظام المتحقق هو النظام الدائم.
 $v = v_c(1 - e^{-\frac{k}{m}t}) = v_c(1 - e^{-0,8 \times 12,5}) \approx v_c$

1 من خلال تغيير شدة دافعة أرخيمدس : $F_A = \rho.V.g = 1,3 \times \frac{4}{3} \pi (1,5 \cdot 10^{-2})^3 \times 9,8 = 1,8 \cdot 10^{-4} N$ $F_A = \rho.V.g$

شدة وزن قطرة الماء : $P = m.g = 13 \cdot 10^{-3} \cdot 9,8 = 0,13 N$

ومن ثم $P \gg F_A$ يمكن إهمال دافعة أرخيمدس أمام الوزن P .
 $P = 708 F_A \Leftrightarrow \frac{P}{F_A} \approx 708$

1-2-2 بتطبيق القانون الثاني لنيتون لدينا $\vec{P} + \vec{f} = m\vec{a}$
بإسقاط العلاقة نجد $P - f = ma$
 $mg - kV^2 = m \frac{dV}{dt}$
 $B = \frac{k}{m}$
 $A = g$
 $\frac{dV}{dt} = g - \frac{k}{m}V^2$
 $\frac{dV}{dt} = A - BV^2$
عند $t=0$ ، $v_0=0$ ، ومنه $a_0=g$

$$a_0 = 9,8 m.s^{-2} \quad v_c = 25 m.s^{-1} \quad -2-2$$

$$\tau = \frac{v_c}{a_0} = 2,55 s$$

ب- عند $t=0$ نجد $a_0 = A - BV_0^2 = A$

$$A - BV_c^2 = 0 \Rightarrow V_c = \sqrt{\frac{A}{B}}$$

$$A = 9,8 m.s^{-2}$$

$$B = \frac{A}{V_c^2} = 1,57 \cdot 10^{-2} m^{-1} \quad -ت-$$

$$a_4 = A - BV_4^2 = 9,8 - 1,57 \cdot 10^{-2} (17,2)^2 = 5,15 m.s^{-2} \quad -3-2$$

$$V_5 = V_4 + a_4 \Delta t = 17,2 + (5,15 \cdot 0,5) = 19,77 m.s^{-1}$$

(4) تصحيح التمرين الرابع = موضوع باكالوريا مغربية ، مسلك العلوم الرياضية الدورة العادية لسنة 2014 :

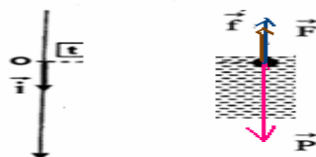
١- * المجموعة المدروسة (الكرة a)

٢- * جرد وتمثيل القوى :

- دافعة أرخيمدس $\vec{F} = -\rho_0.V.g.\vec{i}$

- قوة الاحتكاك المائع $\vec{f} = -6\pi.\eta.r.v.\vec{i}$ حيث v سرعة الكرة ،

- وزنها $\vec{P} = m.g.\vec{i}$



* تطبيق القانون الثاني لنيتون : $\vec{P} + \vec{F} + \vec{f} = m\vec{a}$

* الإسقاط على المحور ox : $m.g - \rho_0.V.g - 6\pi.\eta.r.v = m \frac{dv}{dt}$ وبما أن $m = \rho.V$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{6\pi.\eta.r.v}{\rho.V} = g(1 - \frac{\rho_0}{\rho}) \quad \text{أي} \quad \frac{dv}{dt} + \frac{6\pi.\eta.r.v}{\rho.V} = g - \frac{\rho_0.V.g}{\rho.V}$$

$$\text{بالمقارنة مع المعادلة :} \quad \frac{dv}{dt} + \frac{9.\eta.v}{2.\rho.r^2} = g(1 - \frac{\rho_0}{\rho}) \quad \text{ومن ثم} \quad \frac{dv}{dt} + \frac{6\pi.\eta.r.v}{\rho.\frac{4}{3}.\pi.r^3} = g(1 - \frac{\rho_0}{\rho})$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = C \quad \text{نجد :} \quad \frac{1}{\tau} = \frac{9.\eta}{2.\rho.r^2} \quad \text{و} \quad C = g(1 - \frac{\rho_0}{\rho}) \quad \text{أي} \quad \tau = \frac{2.\rho.r^2}{9.\eta}$$

$$\tau = \frac{2.\rho.r^2}{9.\eta} = \frac{2 \times 2600 \times (0,25 \cdot 10^{-2})^2}{9 \times 8 \cdot 10^{-2}} = 4,51 \cdot 10^{-2} s \quad \text{تطبيق عددي :}$$

1-2 لدينا : $\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = C$ عندما يتحقق النظام الدائم ، تصبح السرعة ثابتة : ثابتة $v = v_\ell$ ومنه : $\frac{dv}{dt} = 0$

أي : $0 + \frac{v_\ell}{\tau} = C \Leftrightarrow v_\ell = C \cdot \tau \Leftrightarrow v_\ell = 6,15$ مع $C = 9,81(1 - \frac{970}{2600})$ و $\tau = 4,51 \cdot 10^{-2} s$ و $v_\ell \approx 0,277 m/s$

1-2-2 من خلال $v_\ell = C \cdot \tau$ ومن خلال تعبير $\tau = \frac{2\rho \cdot r^2}{9\eta} = 4,51 \cdot 10^{-2} s$ يتضح انه بالنسبة للكرة b ذات الشعاع $r' = 2r$ ،

وبالتالي ستستغرق الكرة b وقتا أطول لبلوغ السرعة الحدية من الوقت الذي تستغرقه الكرة a. $\tau_b = \frac{2\rho(2r)^2}{9\eta} = 0,1804s > \tau_a$

2-2- الكرة a قطعت المسافة $d_1 = 5cm$ خلال النظام الانتقالي أي خلال $5\tau_a$ ، وتواصل حركتها بسرعة ثابتة لبلوغ القعر في العمق H-d₁.

الكرة b قطعت المسافة $d_2 = 80cm$ خلال النظام الانتقالي أي خلال $5\tau_b$ ، وتواصل حركتها بسرعة ثابتة لبلوغ القعر في العمق H-d₂.

بما أن سرعة كل منهما في النظام الدائم تصبح ثابتة : $v_\ell(a) = 0,277 m/s$ و $v_\ell(b) = 1,109 m/s$:
المدة التي تستغرقها الكرة a لبلوغ القعر :

$$t_1 = 5\tau_a + \frac{H - d_1}{v_\ell(a)} = 5 \times 4,51 \cdot 10^{-2} + \frac{1 - 0,05}{0,277} = 3,655s$$

المدة التي تستغرقها الكرة b لبلوغ القعر :

$$t_2 = 5\tau_b + \frac{H - d_2}{v_\ell(b)} = 5 \times 0,1804 + \frac{1 - 0,8}{1,109} = 1,082s$$

المدة الزمنية الفاصلة بين وصول الكرتين (a) و (b) إلى قعر الأنبوب :

$$\Delta t = t_2 - t_1 \approx 2,57s$$

(5) التمرين الخامس = موضوع باكالوريا مغربي : درجة قوة احتكاك مانع : شعبة العلوم الرياضية الدورة العادية 2008

$$v_\ell = \frac{d}{\Delta t} = \frac{20 \times 10^{-2} m}{956 \times 10^{-3} s} \approx 0,209 m/s \quad (1)$$

(2) خلال سقوطها تخضع الكرة للقوى التالية : $\vec{P}$ الوزن ، و $\vec{F}$ دافعة أرخميدس ، و $\vec{f}$: قوة الاحتكاك.

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن لدينا :

$$-\vec{f} - \vec{F} + \vec{P} = m \cdot \vec{a}_G \quad \text{بالإسقاط على المحور } oz :$$

$$m \frac{dv}{dt} + 9\pi r \cdot v^n + \rho_2 V \cdot g - mg = 0 \quad \text{أي :}$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{9\pi r \cdot v^n}{m} + \frac{\rho_2 g}{m} V - g = 0$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{9\pi r \cdot v^n}{\rho_1 V} = \frac{g(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_1} \Leftrightarrow m = \rho_1 V \quad \text{مع :} \quad \frac{dv}{dt} + \frac{9\pi r \cdot v^n}{\rho_1 V} = g - \frac{\rho_2 g}{\rho_1}$$

$$\frac{dv}{dt} + A \cdot v^n = B \quad \text{على الشكل :} \quad \frac{dv}{dt} + \frac{27 \cdot v^n}{\rho_1 \cdot 4 \cdot r^2} = \frac{g(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_1} \quad \text{إذن لدينا :}$$

$$B = \frac{g(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_1} \quad \text{و} \quad A = \frac{27}{4\rho_1 r^2} \quad \text{مع :}$$

(3) لدينا v_ℓ ثابتة $\Leftrightarrow \frac{dv_\ell}{dt} = 0$ وبذلك تصبح العلاقة السابقة كما يلي : $A \cdot v_\ell^n = B$ و $v_\ell^n = \frac{B}{A} = \frac{4 \cdot r^2 \cdot g(\rho_1 - \rho_2)}{27}$

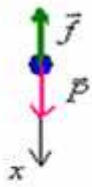
$$v_\ell^n = \frac{B}{A} = \frac{4 \cdot r^2 \cdot g(\rho_1 - \rho_2)}{27} = \frac{4 \times (10^{-2})^2 \times 9,81 \times (2,7 - 1,26) \times 10^3}{27} = 0,209 \quad (4)$$

$$n \log v_\ell = \log 0,209 \Leftrightarrow \log v_\ell^n = \log 0,209$$

$$n = \frac{\log 0,20928}{\log v_\ell} = \frac{\log 0,209}{\log 0,209} = 1$$

تصحيح التمرين السادس : سقوط قطرة ماء في الهواء

1 - $\frac{P}{F_{Ar}} = \frac{mg}{\rho_{air} \cdot V \cdot g} = \frac{\rho_{eau} \cdot V \cdot g}{\rho_{air} \cdot V \cdot g} = \frac{\rho_{eau}}{\rho_{air}} = \frac{10^3}{1,3} \approx 769$ يمكن إهمال دافعة أرخميدس أمام الوزن P. $P \gg F_{Ar} \Leftrightarrow$



(2) المجموعة المدروسة : < قطرة الماء > .
 جرد القوى : بإهمال دافعة أرخميدس ، تخضع القطرة لوزنها $\vec{P}$ ومقاومة الهواء $\vec{f}$.
 نعتبر معما غاليليا $(O, \vec{i})$ موجها في نفس منحنى الحركة .

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن : $\Sigma \vec{F} = m \vec{a}_G$

$$\vec{P} + \vec{f} = m \vec{a}_G$$

بالإسقاط على المحور Ox : $P - f = m \cdot a$

ومنه نجد : $\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} \cdot v = g$ وهي المعادلة التفاضلية . وهي على الشكل : $\frac{dv}{dt} + Av = B$ مع $A = \frac{k}{m}$ و $B = g$

3- من خلال العلاقة السابقة لدينا : $\frac{dv}{dt} = g - \frac{k \cdot v}{m}$ الشرط اللازم لبلوغ السرعة الحدية هو : $\frac{dv}{dt} = 0$ أي : $g - \frac{k \cdot v_\ell}{m} = 0$
 ويتحقق ذلك عندما تكون $t \geq 5\tau$ مع $\tau = \frac{m}{k}$ -4
 السرعة الحدية لقطرة الماء : $v_\ell = \frac{g \cdot m}{k}$

5- لنتحقق من كون : $v = v_\ell (1 - e^{-\frac{k}{m}t}) = \frac{mg}{k} (1 - e^{-\frac{k}{m}t})$ حل للمعادلة التفاضلية السابقة.

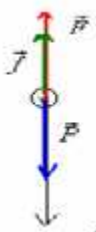
بالتعويض في المعادلة التفاضلية : $\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} \cdot v = g$ $\frac{dv}{dt} = \frac{mg}{k} - \frac{k}{m} v$ $v = \frac{mg}{k} - \frac{mg}{k} e^{-\frac{k}{m}t}$
 $\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m} v + \frac{mg}{k}$ $\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} v = g$ إذن الحل المعطى هو حل للمعادلة التفاضلية.

6- لنحدد قيمة الثابتة k ، علما أن : $R = 25 \mu m$ ، $v_\ell = 7.56 cm/s$ ، $V = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi (25 \cdot 10^{-6})^3 = 6,54 \cdot 10^{-14} m^3$

$k = \frac{m \cdot g}{v_\ell} = \frac{\rho_{eau} \cdot V \cdot g}{v_\ell} = \frac{1000 \times 6,54 \times 10^{-14} \times 9,8}{7,56 \times 10^{-2}} = 8,48 \times 10^{-9} kg/s$ $\Leftarrow v_\ell = \frac{g \cdot m}{k}$

تصحيح التمرين السابع :- نمذجة قوة الاحتكاك المائع

1- تخضع الكرة للقوى التالية : $\vec{P}$ الوزن ، $\vec{F}$ دافعة أرخميدس ، f قوة الاحتكاك .



$$\vec{f} + \vec{F} + \vec{P} = m \vec{a}_G$$

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن لدينا :

$$-f - F + P = m a_z$$

بالإسقاط على المحور Oz :

وهي على الشكل : $\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m} \cdot v + \frac{g(m - \rho \cdot V)}{m}$ $\Leftarrow -\frac{k \cdot v}{m} + \frac{-\rho \cdot V \cdot g + mg}{m} = \frac{dv}{dt} \Leftarrow -k \cdot v - \rho \cdot V \cdot g + mg = m \cdot \frac{dv}{dt}$ -2

مع $A = \frac{g(m - \rho \cdot V)}{m}$ و $B = \frac{k}{m}$

$dv/dt = A - B \cdot v$

3- $A = \frac{g(m - \rho \cdot V)}{m} = \frac{10 \cdot s^{-2} (35 \cdot 10^{-3} kg - 0,9110^3 kg \cdot m^{-3} \times 33,5 \cdot 10^{-6} m^3)}{35 \times 10^{-3} kg} = \frac{10 \cdot (35 - 0,91 \times 33,5)}{35} = 1,29 m \cdot s^{-2}$

4- $v_\ell = 0,17 m/s$ والسرعة الحدية : $\frac{dv}{dv} = A - B \cdot v_\ell = 0 \Leftarrow v_\ell = \frac{A}{B} = 0,17 m/s \Leftarrow B = \frac{A}{v_\ell} = \frac{1,29}{0,17} = 7,59$

-5

i	0	1	2	3	4	5	6	7
$t_i (s)$	0	0,08	0,16	0,24	0,32	0,40	0,48	0,56
$v_i (m/s)$	v_0	0,102	0,143	v_3	0,165	0,167	0,169	0,169
$a_i = dv_i/dt (m/s^2)$	a_0	0,51	0,20	a_3	0,03	0,02	0,00	0,00

1- قيمة الخطوة $\Delta t = 0,08 s$

2- بمعرفة v_0 من خلال الشروط البدئية : $v_0 = 0$ لدينا : $a_0 = A - B \cdot v_0 = A = 1,29 m/s$

$a_3 = A - B.v_3 = 1,29 - 7,59 \times 0,159 \approx 0,08 \text{ m/s}^2$ ولدنيا: $v_3 = 0,059 \text{ m/s} \Leftarrow v_4 = v_3 + 0,08.a_3$
 3-5- المنحنى التجريبي $v = f(t)$ يقارب النظري نتحقق وبالتالي تمت نمذجة قوة الاحتكاك بطريقة صحيحة.

(8) تصحيح التمرين الثامن : حركة صعود فقاعة من الهواء في الماء :

أجوبة : 1- لدينا : $PV = nRT$ مع : $V = \frac{4}{3}\pi.r^3$ و : $P = P_{atm} - \rho.g.z$ وبذلك تصبح العلاقة السابقة كما يلي :

$$r = \sqrt[3]{\frac{3n.R.T}{(P_{atm} - \rho.g.z).4\pi}} \quad \text{ومنه} \quad (P_{atm} - \rho.g.z) \cdot \frac{4}{3}\pi.r^3 = n.R.T$$

$PV = nRT$ - 2 $\Leftarrow$ كمية مادة الهواء في الفقاعة.

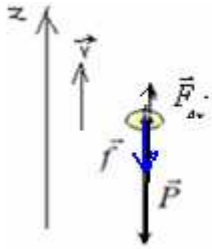
$$n = \frac{P.V}{RT} = \frac{(P_{atm} - \rho.g.z) \cdot \frac{4}{3}\pi.r_o^3}{RT} = \frac{[10^5 - 10^3 \times 9,8(-3)] \times 4 \times \pi \times (0,5 \times 10^{-3})^3}{3 \times 8,314 \times 300} = 2,7 \cdot 10^{-8} \text{ mol}$$

3- عند السطح $z=0$ وبذلك العلاقة : $(P_{atm} - \rho.g.z).V = n.R.T$ تصبح $P_{atm} \cdot \frac{4}{3}\pi.r^3 = n.R.T$ ومنه حجم الفقاعة عند السطح :

$$P_{atm} \cdot \frac{4}{3}\pi.r^3 = \sqrt[3]{\frac{3.n.R.T}{4\pi.P_{atm}}} = \sqrt[3]{\frac{3 \times 2,7 \times 10^{-8} \times 8,314 \times 300}{4 \times \pi \times 10^5}} = 0,54 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 0,54 \text{ mm}$$

التغير: $\Delta r = 0,54 - 0,5 = 0,04 = 4\%$ $\Leftarrow \Delta r < 10\%$ وبالتالي تغير شعاع الفقاعة مهم.

$$m = M.n = 29 \times 2,7 \times 10^{-8} = 7,83 \cdot 10^{-7} \text{ g} \quad \Leftarrow \quad n = \frac{m}{M} \quad \text{-4}$$



1-6-6

مميزات $\vec{P}$:
 - الاتجاه الراسي لمار من G
 - المنحنى نحو الأسفل
 $P = mg$

5- مميزات $\vec{F}_A$:
 - الاتجاه الراسي لمار من G
 - نحو الأعلى
 - دافعة أرخميدس
 $F_A = \rho V g = \frac{\rho \cdot 4\pi r_o^3 \cdot g}{3} \approx 5 \cdot 10^{-6} \text{ N}$

2-6- *تطبيق القانون الثاني لنيوتن : $\vec{P} + \vec{F}_A + \vec{f} = m.\vec{a}$

بالإسقاط على المحور oz : $-P + F_A - f = m \cdot \frac{dv}{dt}$ الفقاعة تندفع نحو الأعلى .

$$\frac{dv}{dt} + \frac{6\pi\eta.r_o}{m} \cdot v = g \left(\frac{\rho.V}{m} - 1 \right) \quad \text{أي} \quad \frac{dv}{dt} + \frac{6\pi\eta.r_o}{m} \cdot v = g \left(\frac{\rho.V}{m} - 1 \right) \Leftarrow -mg + \rho.V.g - 6\pi\eta.r_o.v = m \cdot \frac{dv}{dt}$$

نضع $\alpha = \frac{6\pi\eta.r_o}{m}$ و $\beta = g \left(\frac{\rho.V}{m} - 1 \right)$ فتكتب العلاقة السابقة كما يلي : $\frac{dv}{dt} + \alpha.v = \beta$ وهي المعادلة التفاضلية التي تحققها السرعة.

7 حل المعادلة التفاضلية : $v = v_\ell (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = v_\ell - v_\ell \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \Leftarrow \frac{dv}{dt} = \frac{v_\ell}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$ بالتعويض في المعادلة التفاضلية :

$$\begin{cases} \alpha.v_\ell - \beta = 0 \\ -\alpha + \frac{1}{\tau} = 0 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} v_\ell \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} (-\alpha + \frac{1}{\tau}) + \alpha.v_\ell - \beta = 0 \end{cases} \quad \text{أي} \quad \frac{v_\ell}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \alpha.v_\ell - \alpha.v_\ell \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = \beta$$

$$\begin{cases} v_\ell = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{g(\rho.V - m)}{6\pi\eta.r_o} \\ \tau = \frac{1}{\alpha} = \frac{m}{6\pi\eta.r_o} \end{cases} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} v_\ell = \frac{\beta}{\alpha} \\ \tau = \frac{1}{\alpha} \end{cases}$$

$$v_\ell = \frac{g(\rho.V - m)}{6\pi\eta.r_o} = \frac{9,8 \times (10^3 \cdot 5,234 \times 10^{-10} - 7,83 \times 10^{-10})}{6 \cdot \pi \cdot 10^{-3} \cdot 0,5 \times 10^{-3}} = 0,54 \text{ m/s} \quad \text{8}$$

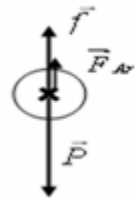
(9) تصحيح التمرين التاسع: حركة سقوط كرة معدنية في مائع:

1.أ- بمقارنة المعادلة $v(t) = 1,14 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{0,132}}\right)$ مع $x(t) = \frac{\beta}{\alpha} \cdot (1 - e^{-\alpha \cdot t})$ نجد: $\alpha = \frac{1}{0,132}$ و $\frac{\beta}{\alpha} = 1,14$

المقدار $\left(1 - e^{-\frac{t}{0,132}}\right)$ في تعبير التسارع ليس له بعد، إذن النسبة $\frac{\beta}{\alpha}$ متجانسة مع السرعة . لها نفس وحدة السرعة أي $m.s^{-1}$.

ب- $v(t) = 1,14 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{0,132}}\right)$ حل لمعادلة تفاضلية من النوع: $\frac{dv}{dt} + \alpha \cdot v = \beta$

بالمقارنة $v \Leftrightarrow x$ ، أي: $\frac{dv}{dt} + \alpha \cdot v = \beta$ لكن: $\alpha = 7,58$ و $\frac{\beta}{\alpha} = 1,14$ أي $\beta = 1,14\alpha$ إذن: $\beta = 1,14 \times 7,58 = 8,64$ بتعويض α و β بقيمتها نصل إلى العبارة المعطاة $\frac{dv}{dt} + 7,58v = 8,64$



2.أ. المجموعة المدروسة هي الكرة .

القوى المطبقة على الكرة هي:

- $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$: الوزن ، متجه رأسي و اتجاهه نحو الأسفل .

- $\vec{F}_{Ar}$: دافعة أرخميدس ، متجه رأسي و اتجاهها نحو الأعلى .

- $\vec{f}$: قوة الاحتكاك ، متجه رأسي و اتجاهها نحو الأعلى .

ب. بتطبيق قانون نيوتن الثاني: $\vec{P} + \vec{f} + \vec{F}_{Ar} = m \cdot \vec{a}_G$

بالإسقاط على المحور الرأسي الموجب نحو الأسفل: $P - f - F_{Ar} = m \cdot a$

3.أ. بالتعويض عن f و F_{Ar} في العبارة الأخيرة، نجد:

$m \cdot g - k \cdot v - \rho \cdot V \cdot g = m \cdot \frac{dv}{dt}$ أي: $g \cdot (m - \rho \cdot V) - k \cdot v = \frac{dv}{dt}$

و بقسمة طرفي المعادلة على m ينتج: $\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} \cdot v = \left(1 - \frac{\rho \cdot V}{m}\right) \cdot g$

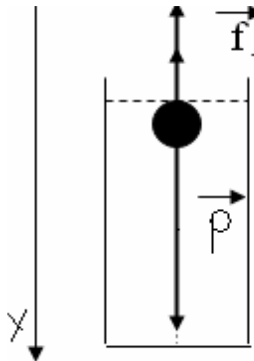
ب. بمطابقة المعادلة السابقة مع المعادلة $\frac{dx}{dt} + \alpha \cdot x = \beta$ ، نجد: $\alpha = \frac{k}{m}$ و $\beta = \left(1 - \frac{\rho \cdot V}{m}\right) \cdot g$

ج. إذا كنت دافعة أرخميدس مهملة $F_{Ar} = 0$ ، فإن: $\rho \cdot V = 0$ ومنه: $\beta = \left(1 - \frac{0}{m}\right) \cdot g$ أي أن: $\beta = g$ ومنه: $\beta = 9,80 m.s^{-2}$

نلاحظ في المعادلة التفاضلية: $\frac{dv}{dt} + 7,58v = 8,64$ أن $\beta = 8,64 m.s^{-2}$ إذن: $\beta \neq g \neq 9,80 m.s^{-2}$

و عليه فإن يجب أخذ دافعة أرخميدس بعين الاعتبار لان شدتها: $F_{Ar} = m \cdot (g - \beta) = 3,7 \times 10^{-2} N$

(11) تصحيح التمرين العاشر: سقوط كرة معدنية في مائع :



$\vec{P} + \vec{F}_{Ar} + \vec{f} = m \cdot \vec{a}$ 1-2 - 2 $\vec{F}_{Ar}$ و $\vec{f}$ ، $\vec{P}$ -1

بالإسقاط على oy : $mg - F_{Ar} - kv = m \frac{dv}{dt}$

2-2 $\begin{cases} A = g - \frac{F_{Ar}}{m} \\ B = \frac{k}{m} \end{cases}$ و

وهي على الشكل: $\frac{dv}{dt} = A - B \cdot v$ $\frac{dv}{dt} = g - \frac{F_{Ar}}{m} - \frac{k}{m} \cdot v$

3-2 $A = 9,8 - \frac{\rho V g}{m} = 9,8 - 1,45 = 8,35 m/s^2$

3- $B = \frac{A}{v_\ell} = 10,4 s^{-1}$ ومنه: $v_\ell = \frac{A}{B} = 0,8$ $0 = A - B \cdot v_\ell \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = 0 \Leftrightarrow v = C^{te} = v_\ell$ في النظام الدائم

4- $\frac{dv}{dt} = A - B \cdot v$ بالتعويض المعادلة التفاضلية $\frac{dv}{dt} = -B \cdot C e^{-B \cdot t} \Leftrightarrow v = v_\ell + C \cdot e^{-B \cdot t}$ نجد:

$\Leftrightarrow 0 = v_\ell + C$: $v=0$ ، $t=0$ وبما أن عند $v_\ell = \frac{A}{B} \Leftrightarrow A - B v_\ell = 0$ أي: $-B C e^{-B \cdot t} = A - B v_\ell - B C e^{-B \cdot t}$

$C = v_\ell$ والحل يصبح: $v = v_\ell \cdot (1 - e^{-B \cdot t})$ مع $B = \frac{k}{m}$ ومنه: $\tau = \frac{1}{B} = \frac{m}{k} = 96 ms$

12 تصحيح التمرين الحادي عشر: سقوط كرة معدنية في مائع :

$$f = k.v^2 \quad \text{1-}$$

$$[F] = [m][a] \quad \Leftrightarrow F = m.a \quad \text{لدينا}$$

$$[k] = \frac{[F]}{[v]} = \frac{[m][a]}{[v]} = \frac{kg.m.s^{-2}}{m^2.s^{-2}} = kg/m \quad \text{ومنه :}$$

2-

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن لدينا $\vec{P} + \vec{f} = m\vec{a}$ 1-2-2

بإسقاط العلاقة نجد $P - f = ma$

$$mg - kV^2 = m \frac{dV}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dV}{dt} = g - \frac{k}{m} V^2 \\ \frac{dV}{dt} = A - BV^2 \end{array} \right.$$

$$B = \frac{k}{m} \\ A = g$$

$$\vec{P} + \vec{f} = m\vec{a} \quad \text{نجد بالاسقاط} \quad P - f = m \frac{dv}{dt} \quad \text{أي} \quad mg - k.v^2 = m \frac{dv}{dt} \quad \text{ومنه :} \quad \frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}.v^2 \quad \text{أي} \quad a_i = g - \frac{k}{m}.v^2$$

$$1-3-3 \quad \text{من خلال المعادلة التفاضلية :} \quad a_n = g - \frac{k}{m}.v_n^2 \quad (1)$$

$$\text{من خلال طريقة أولير لدينا :} \quad v_{n+1} = a_n \Delta t + v_n \quad \Leftrightarrow \quad a_n = \frac{v_{n+1} - v_n}{\Delta t} \quad \text{بالتعويض في (1) نحصل على :}$$

$$(2) \quad \text{وهي على الشكل} \quad v_{n+1} = v_n + g\Delta t - \frac{k}{m}\Delta t.v_n^2 \quad \text{ومنه :} \quad v_{n+1} - v_n = g\Delta t - \frac{k}{m}\Delta t.v_n^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{v_{n+1} - v_n}{\Delta t} = g - \frac{k}{m}.v_n^2$$

$$v_\ell = 50m/s \quad \text{مبيانيا} \quad \frac{k}{m} = \frac{g}{v_\ell^2} \quad \Leftrightarrow \quad v_\ell = \sqrt{\frac{mg}{k}} \quad , \quad A = g.\Delta t = 9,8.0,5 = 4,9m/s \quad , \quad v_{n+1} = v_n + A - B.v_n^2 :$$

$$B = \frac{k}{m}\Delta t = \frac{g}{v_\ell^2}.\Delta t = 1,96.10^{-3}s.m^{-1}$$

$$2-3 \quad \text{أ-} \quad t \approx 8s \quad \text{ب-} \quad v_\ell = 50m/s = 180km/h \quad \text{ج-} \quad 5\tau \approx 8s \quad \Leftrightarrow \quad \tau = 1,6s$$

SBIRO Abdelkrim