

1- نهاية f عند $+\infty$

لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x} = +\infty$

إذن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

2- أ- * دراسة قابلية اشتقاق f على اليمين في 0

لكل x من $\mathbb{R}^{+*}$:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\ln(1 + x + \sqrt{x^2 + 2x})}{x + \sqrt{x^2 + 2x}} \cdot \frac{x + \sqrt{x^2 + 2x}}{x}$$

وبما أن : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + x + \sqrt{x^2 + 2x})}{x + \sqrt{x^2 + 2x}} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$

و $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \sqrt{x^2 + 2x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 + \sqrt{1 + \frac{2}{x}} = +\infty$

فإن : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$

وبالتالي فإن f غير قابلة للاشتقاق على اليمين في 0

* التأويل الهندسي

المنحنى (C) يقبل على يمين النقطة $O(0, 0)$ نصف مماس رأسي موجه نحو الأعلى .

ب - تغيرات f

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^{+*}$ ولدينا لكل x من $\mathbb{R}^{+*}$:

$$f'(x) = \frac{1 + \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x}}}{x+1+\sqrt{x^2+2x}} = \frac{\sqrt{x^2+2x} + x+1}{(x+1+\sqrt{x^2+2x})\sqrt{x^2+2x}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+2x}}$$

إذن : $f'(x) > 0$ لكل x من $\mathbb{R}^{+*}$

ومنه جدول تغيرات الدالة f :

x	0	$+\infty$
f'(x)		+
f(x)	0	$+\infty$

3- دراسة الفرع اللانهائي بجوار $+\infty$

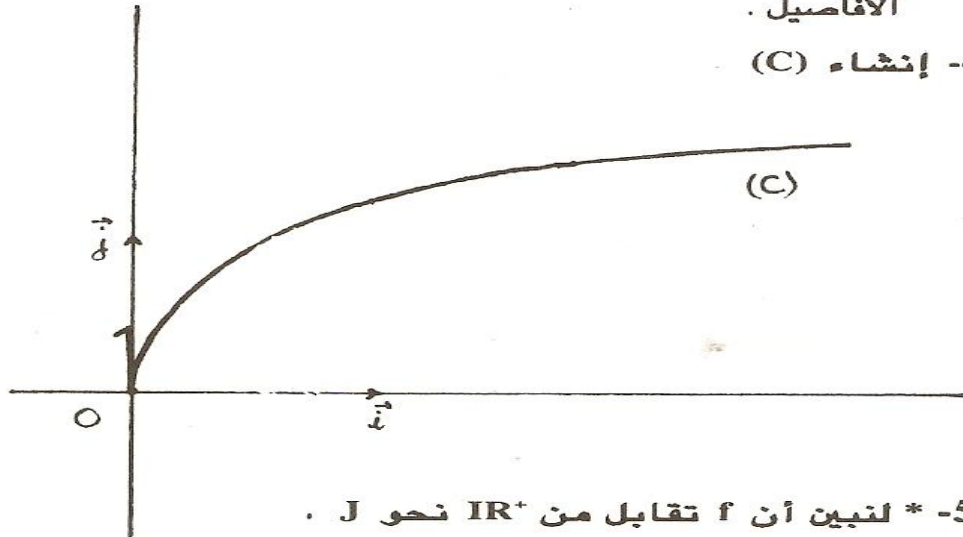
لدينا :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x \left(1 + \frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{2}{x}} \right)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} + \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{2}{x}} \right)}{x} = 0 + 0 = 0$$

إذن : المنحنى (C) يقبل بجوار $+\infty$ فرعاً شلجياً اتجاهه محور الأفاسيل .

4- إنشاء (C)



5- * لنبين أن f تقابل من $\mathbb{R}^+$ نحو J .

الدالة f متصلة وتزايدية قطعاً على $\mathbb{R}^+$

إذن f تقابل من $\mathbb{R}^+$ نحو : $J = f(\mathbb{R}^+) = [0, +\infty[$

وبالتالي فهي تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة من $\mathbb{R}^+$ نحو $\mathbb{R}^+$

* حساب $f^{-1}(x)$

ليكن x و y عنصرين من $\mathbb{R}^+$

لدينا :

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$$

$$\Leftrightarrow \ln(y + 1 + \sqrt{y^2 + 2y}) = x$$

$$\Leftrightarrow \ln(y + 1 + \sqrt{y^2 + 2y}) = \ln e^x$$

$$\Leftrightarrow y + 1 + \sqrt{y^2 + 2y} = e^x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y^2 + 2y} = e^x - y - 1$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{y^2 + 2y})^2 = (e^x - y - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow y^2 + 2y = e^{2x} + y^2 + 1 - 2ye^x - 2e^x + 2y$$

$$\Leftrightarrow 2ye^x = e^{2x} - 2e^x + 1$$

$$\Leftrightarrow 2ye^x = (e^x - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{(e^x - 1)^2}{2e^x}$$

إذن :

$$f^{-1}(x) = \frac{(e^x - 1)^2}{2e^x} \quad \text{لكل } x \text{ من } \mathbb{R}^+ .$$

Achamel