

1- أ- تحديد D_f مجموعة تعريف f

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$

لدينا : $x \in D_f \Leftrightarrow |x| > 0$

$$\Leftrightarrow |x| \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x \neq 0$$

إذن $D_f =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

ب- بما أن f دالة زوجية لأن لكل x من D_f

لدينا $f(-x) = f(x)$ و $(-x) \in D_f$

فإنه يمكن الاكتفاء بدراسة f على المجال $E =]0, +\infty[$ ولدينا لكل

$$x \in E : f(x) = 2 - 2\sqrt{x} + \ln x$$

2- أ- نهاية f على اليمين في الصفر

باستعمال النتيجة $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ نجد أن $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$

محور الارايب هو إذن مقارب رأسي للمنحنى (ع)

نهاية f عند $+\infty$

لا يمكن حساب هذه النهاية مباشرة (شكل غير محدد : $-\infty + \infty$)

لدينا لكل x من $]0, +\infty[$:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 - 2\sqrt{x} + \ln x = 2 - 2\sqrt{x} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2} \ln x\right) \\ &= 2 - 2\sqrt{x} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \ln x^{1/2}\right) \\ &= 2 - 2\sqrt{x} \left(1 - \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right) \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0 \quad \text{وبما أن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \quad \text{فإن}$$

ب- تغيرات f على E

الدالة f قابلة للاشتقاق على E ولدينا لكل x من E :

$$f'(x) = -2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x} = \frac{-\sqrt{x}}{x} + \frac{1}{x} = \frac{1 - \sqrt{x}}{x}$$

ومنه جدول تغيرات f على E :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	0
$f(x)$			-

$-\infty$ $-\infty$

3- أ- دراسة الفرع اللانهائي بجوار $+\infty$

لدينا

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x} - \frac{2\sqrt{x}}{x} + \frac{\ln x}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{x} \right)$$

وباستعمال النتيجة $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ نجد أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

وهذا يعني أن المنحنى (C) يقبل بجوار $+\infty$ فرعاً شلجياً اتجاهه محور الأفاصيل.

ب- نقطة الانعطاف

الدالة f قابلة للاشتقاق مرتين على $\mathbb{R}^{+*}$ ولدينا لكل x من $\mathbb{R}^{+*}$:

$$f''(x) = \frac{\frac{-1}{2\sqrt{x}} \cdot x - 1 + \sqrt{x}}{x^2} = \frac{-\frac{1}{2}\sqrt{x} - 1 + \sqrt{x}}{x^2}$$

$$= \frac{\sqrt{x} - 2}{2x^2}$$

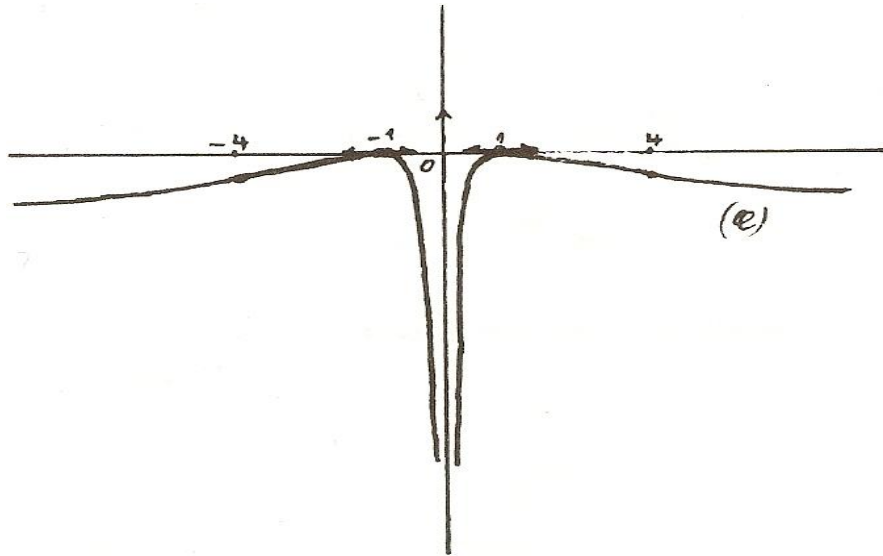
الجدول التالي يعطي إشارة $f''(x)$ في المجال $]0, +\infty[$:

x	0	4	$+\infty$
$f''(x)$		0	+
C_f		∩	∪

من خلال الجدول يتبين أن الدالة f' تنعدم مع تغيير الإشارة في العدد 4.

وهذا يعني أن المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف أفصولها 4 وأرتوبها $f(4) = 2(-1 + \ln 2)$

إنشاء (C)



ج- عدد حلول المعادلة $x = m e^{2\sqrt{x}}$ حيث $m \in \mathbb{R}^{+*}$
 مجموعة تعريف المعادلة (E) هي $\mathbb{R}^{+}$.
 وباعتبار أن العدد 0 ليس حلا للمعادلة (E) فإننا سنحل هذه
 المعادلة في $\mathbb{R}^{+*}$.
 لدينا لكل x من $\mathbb{R}^{+*}$:

$$\begin{aligned} x = m e^{2\sqrt{x}} &\Leftrightarrow \ln x = \ln m + \ln e^{2\sqrt{x}} \\ &\Leftrightarrow \ln x = \ln m + 2\sqrt{x} \\ &\Leftrightarrow \ln x - 2\sqrt{x} + 2 = 2 + \ln m \\ &\Leftrightarrow f(x) = 2 + \ln m \end{aligned}$$

إذن عدد حلول المعادلة (E) هو عدد نقط تقاطع (Γ) منحنى قصور
 الدالة f على $\mathbb{R}^{+*}$ مع المستقيم (Δ) الذي المعادلة $y = 2 + \ln m$
 ومنه:

- إذا كان $2 + \ln m > 0$ أي $\ln m > -2$ أي $m > e^{-2}$
 فإن (Γ) و (Δ) لا يتقاطعان .
 وهذا يعني أنه إذا كان $m > e^{-2}$ فإن المعادلة (E) ليس لها أي حل
 - إذا كان $2 + \ln m = 0$ أي $m = e^{-2}$ فإن (Γ) و (Δ)
 يتقاطعان في نقطة واحدة .
 وهذا يعني أنه إذا كان $m = e^{-2}$ فإن المعادلة (E) تقبل حلا
 وحيدا (هو العدد 1)
 - إذا كان $2 + \ln m < 0$ أي $m < e^{-2}$ فإن (Γ) و (Δ)
 يتقاطعان في نقطتين إثنين ، وهذا يعني أنه إذا كان
 $0 < m < e^{-2}$ فإن المعادلة (E) تقبل حلين إثنين .
- وسنلخص هذه النتائج في الجدول التالي :

