

1-أ- حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1+x^2} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty \quad \text{بما أن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1+x^2} - x = +\infty \quad \text{فإن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad \text{إذن :}$$

ب- لنبين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1+x^2} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}+x} \quad \text{بما أن :}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^2 = 0 \quad \text{فإن :}$$

2-أ- لنبين أن $f'(x) = \frac{-2f(x)}{\sqrt{1+x^2}}$

الدالة f قابلة للاشتقاق على IR ولدينا لكل $x \in IR$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(\sqrt{1+x^2} - x)(\sqrt{1+x^2} - x)' \\ &= 2(\sqrt{1+x^2} - x) \left(\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} - 1 \right) \\ &= 2(\sqrt{1+x^2} - x) \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - 1 \right) = 2(\sqrt{1+x^2} - x) \left(\frac{x - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} \right) \\ &= \frac{-2(\sqrt{1+x^2} - x)(\sqrt{1+x^2} - x)}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{-2(\sqrt{1+x^2} - x)^2}{\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{-2f(x)}{\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

ب- * لنبين أن $f'(x) \neq 0$ لكل $x \in IR$

لذلك سنبين أن المعادلة $f'(x) = 0$ لا تقبل أي حل في IR .

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2f(x)}{\sqrt{1+x^2}} = 0 \quad \text{لدينا :}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{1+x^2} - x)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+x^2} - x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+x^2} = x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1+x^2 = x^2 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

وهذا غير ممكن

إذن المعادلة $f'(x) = 0$ لا تقبل أي حل في IR

وهذا يعني أن $f'(x) \neq 0$ لكل $x \in IR$.

طريقة ثانية:

ليكن x عنصرا حقيقيا

بما أن : $x^2 + 1 > x^2$

فإن : $\sqrt{x^2 + 1} > \sqrt{x^2}$

يعني أن : $\sqrt{x^2 + 1} > |x|$

وبما أن : $|x| \geq x$

فإن : $\sqrt{x^2 + 1} > x$

يعني أن : $\sqrt{x^2 + 1} - x > 0$

إذن : $f(x) > 0$

ومنه $f(x) \neq 0$

وبالتالي: $f'(x) \neq 0$ لكل x من $\mathbb{R}$.

• جدول تغيرات الدالة f

بما أن : $f'(x) = \frac{-2f(x)}{\sqrt{1+x^2}}$ لكل x من $\mathbb{R}$.

فإن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $-f(x)$

وبما أن $f(x) > 0$ لكل x من $\mathbb{R}$.

فإن $f'(x) < 0$ لكل x من $\mathbb{R}$.

ومنه جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		-
$f(x)$	$+\infty$	0

3- * لنبين أن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$

لكل x من $\mathbb{R}^*$ ، $\frac{f(x)}{x} = \frac{(\sqrt{1+x^2} - x)^2}{x}$

$$= \frac{1+x^2 - 2x\sqrt{1+x^2} + x^2}{x} = \frac{1+2x^2 - 2x\sqrt{1+x^2}}{x}$$

$$= \frac{1}{x} + 2x - 2\sqrt{1+x^2}$$

وبما أن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x - 2\sqrt{1+x^2} = -\infty$

فإن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$

• التأويل الهندسي

المنحنى (ع) يقبل بجوار $-\infty$ فرعاً شلجيميا اتجاهه محور الأرتيب.

4-أ. معادلة للمماس (T)

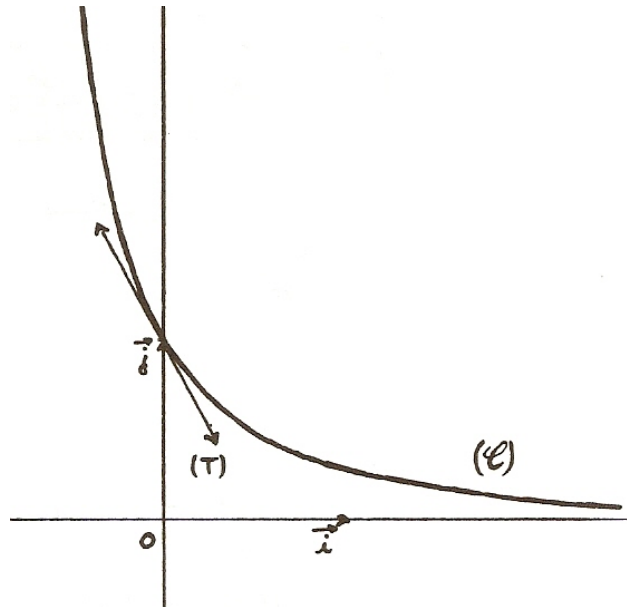
معادلة ديكارتية للمستقيم (T) مماس (ζ) في النقطة ذات الإحداثيات 0 هي:

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

$$y = -2(x - 0) + 1 \quad \text{أي}$$

$$y = -2x + 1 \quad \text{أي}$$

ب- رسم (T) و (ζ)



5-أ. لنبين أن f تقابل من IR نحو مجال J .

الدالة f متصلة وتناقصية قطعاً على IR

إذن فهي تقابل من IR نحو المجال $J = f(IR) =]0, +\infty[$

وبالتالي فهي تقبل دالة عكسية f معرفة على من $]0, +\infty[$ نحو IR

ب- حساب $(f^{-1})'(1)$

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1))} \quad \text{بما أن :}$$

$$f^{-1}(1) = 0 \quad \text{فإن} \quad (f)(0) = 1$$

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} \quad \text{فإن :}$$

$$= \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

ج- حساب $f'(x)$

ليكن x عنصراً من $]0, +\infty[$ و y عنصراً من IR

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{1+y^2} - y)^2 = x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+y^2} - y = \sqrt{x} \quad \text{أو} \quad \sqrt{1+y^2} - y = -\sqrt{x}$$

$$\text{لدينا : } \sqrt{1+y^2} - y > 0 \quad (\text{لأن } \sqrt{1+y^2} > y)$$

$$\sqrt{1+y^2} - y = \sqrt{x} \quad \text{أي} :$$

$$(\sqrt{1+y^2})^2 = (\sqrt{x} + y)^2 \quad \text{أي} : \quad \sqrt{1+y^2} = \sqrt{x} + y$$

$$1 + y^2 = 2y\sqrt{x} + y^2 \quad \text{أي} :$$

$$y = \frac{1-x}{2\sqrt{x}} \quad \text{أي} : \quad 2y\sqrt{x} = 1-x$$

$$\text{إذن : } f^{-1}(x) = \frac{1-x}{2\sqrt{x}} \quad \text{لكل } x \text{ من } \mathbb{R}$$