

**1-أ-** لنبين أن :  $V_n = \frac{1}{2^n}$  لكل  $n$  من  $IN$

ليكن  $n$  عنصرا من  $IN$

بما أن :  $V_n = U_{n+1}^3 - U_n^3$

$$= \left( \sqrt[3]{U_n^3 + \frac{1}{2^n}} \right)^3 - U_n^3 = U_n^3 + \frac{1}{2^n} - U_n^3$$

فإن :  $V_n = \frac{1}{2^n}$  لكل  $n$  من  $IN$

**ب-** حساب  $S_n = V_0 + \dots + V_{n-1}$  بدلالة  $n$

\* لدينا حسب السؤال السابق :

$$V_n = \left( \frac{1}{2} \right)^n \text{ لكل } n \text{ من } IN$$

إذن  $(V_n)$  متتالية هندسية أساسها  $q = \frac{1}{2}$

$$V_0 = \left( \frac{1}{2} \right)^0 = 1 \text{ وحدها الأول}$$

\* ليكن  $n$  عنصرا من  $IN^*$

لدينا :  $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_{n-1}$

$$= V_0 \cdot \frac{1 - q^{(n-1)-0+1}}{1 - q} = 1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1 - \left( \frac{1}{2} \right)^n}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1 - \left( \frac{1}{2} \right)^n}{\frac{1}{2}} = 2 \left( 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^n \right)$$

إذن :  $S_n = 2 - \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1}$  لكل  $n$  من  $IN^*$

**2-أ-** لنبين أن :  $S_n = U_n^3 - 1$  لكل  $n$  من  $IN^*$

ليكن  $n$  عنصرا من  $IN^*$

لدينا :  $V_0 = U_1^3 - U_0^3$

و  $V_1 = U_2^3 - U_1^3$

$\vdots$

و  $V_{n-2} = U_{n-1}^3 - U_{n-2}^3$

و  $V_{n-1} = U_n^3 - U_{n-1}^3$

نقوم بجمع هذه المتساويات طرفا طرفا فنحصل على :

$$V_0 + V_1 + \dots + V_{n-2} + V_{n-1} = -U_0^3 + U_n^3$$

أي :  $S_n = U_n^3 - 1$

**ب-** \* استنتاج  $U_n$  بدلالة  $n$  .

ليكن  $n$  عنصرا من  $IN^*$

$$S_n = U_n^3 - 1 \quad : \text{بما أن}$$

$$U_n^3 = 1 + S_n \quad : \text{فإن}$$

$$U_n = \sqrt[3]{1 + 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} \quad : \text{إذن}$$

وبالتالي فإن :

$$U_n = \sqrt[3]{3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} \quad \text{لكل } n \text{ من } \mathbb{N}^*$$

• حساب نهاية  $(U_n)$

$$U_n = \sqrt[3]{3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} \quad \text{لكل } n \text{ من } \mathbb{N}^* \quad \text{لدينا حسب ما سبق}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0 \quad : \text{وبما أن } \left(-1 < \frac{1}{2} < 1\right) \text{ لأن } \left(-1 < \frac{1}{2} < 1\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \sqrt[3]{3 - 0} = \sqrt[3]{3}$$