

$$(1) \text{ أ) أبين أن: } a + \frac{1}{a} \geq 2$$

$$a + \frac{1}{a} - 2 = \frac{a^2 + 1 - 2a}{a} = \frac{(a-1)^2}{a}$$

نعلم أن مربع أي عدد حقيقي فهو دائما موجبا.

إذن: $(a-1)^2$ عدد موجب

ولدينا a عدد موجب قطعاً

ومنه فإن: $\frac{(a-1)^2}{a}$ عدد موجب

$$\boxed{a + \frac{1}{a} \geq 2} \text{ وبالتالي فإن:}$$

$$(ب) \text{ أبين أن: } \frac{c}{ac+b} \leq \frac{1}{a}$$

$$\frac{c}{ac+b} - \frac{1}{a} = \frac{\cancel{ac} - \cancel{ac} - b}{a(ac+b)} = -\frac{b}{a(ac+b)}$$

وبما أن a و b و c أعداد حقيقية موجبة قطعاً.

$$\text{فإن: } \frac{b}{a(ac+b)} \text{ موجب قطعاً}$$

$$\text{أي: } -\frac{b}{a(ac+b)} \text{ سالب قطعاً.}$$

$$\boxed{\frac{c}{ac+b} \leq \frac{1}{a}} \text{ وبالتالي فإن:}$$

(2) أقرن $\frac{a+c}{b+c}$ و $\frac{a}{b}$

$$\begin{aligned}\frac{a+c}{b+c} - \frac{a}{b} &= \frac{b(a+c) - a(b+c)}{b(b+c)} \\ &= \frac{ba + bc - ab - ac}{b(b+c)} \\ &= \frac{bc - ac}{b(b+c)}\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{a+c}{b+c} - \frac{a}{b} = \frac{c(b-a)}{b(b+c)}}$$

♦ إذا كان: $a \leq b$ فإن: $b - a$ عدد موجب.

وبما أن b و c موجبين

فإن: $\frac{c(b-a)}{b(b+c)}$ عدد موجب

$$\boxed{\frac{a+c}{b+c} \geq \frac{a}{b}} \quad \text{ومنه:}$$

♦ إذا كان: $a \geq b$ فإن: $a - b$ عدد سالب.

إذن: $\frac{c(b-a)}{b(b+c)}$ سالب

$$\boxed{\frac{a+c}{b+c} \leq \frac{a}{b}} \quad \text{ومنه:}$$

ب) أستنتج مقارنة للعددين: $\frac{314830011}{64732}$ و $\frac{314830004}{64725}$

$$\frac{314830011}{64732} = \frac{314830004 + 7}{64725 + 7}$$

ربما أن: $31480004 \geq 647225$

بحسب السؤال السابق.

$$\frac{314830004 + 7}{64725 + 7} \leq \frac{314830004}{64725} \quad \text{فإن:}$$

$$\boxed{\frac{314830011}{64732} \leq \frac{31480004}{64725}} \quad \text{ذن:}$$

أرسله الاستاذ عبد الواحد عاوي