

1- نهايتا  $f$  عند محدي  $D_f$

لدينا :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \ln x) = -\infty$

إذن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

ولدينا :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow 0^-} e^t = 1$

إذن :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

2- \* اتصال  $f$  في الصفر

لدينا :  $\lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0$

إذن :  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0.0 = 0 = f(0)$

وهذا يعني أن الدالة  $f$  متصلة على اليسار في الصفر

ولدينا :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 - x(x \ln x) = 0 - 0.0 = 0 = f(0)$

إذن الدالة  $f$  متصلة على اليمين في الصفر

خلاصة : الدالة  $f$  متصلة في النقطة  $x_0 = 0$  لأنها متصلة على اليمين وعلى اليسار في هذه النقطة

\* قابلية اشتقاق  $f$  في الصفر

لدينا :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x - x \ln x = 0 - 0 = 0$

إذن الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على اليمين في الصفر

و  $f'_d(0) = 0$

ولدينا :  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$

إذن الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على اليسار في الصفر

و  $f'_g(0) = 0$

خلاصة : الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق في النقطة  $x_0 = 0$

و  $f'(0) = 0$  لأنها قابلة للاشتقاق على اليمين وعلى

اليسار في هذه النقطة و  $f'_d(0) = f'_g(0)$

ملاحظة : المنحنى ( $\mathcal{C}$ ) يقبل في النقطة  $O(0, 0)$  مماسا أفقيا.

3- 1 - تحديد  $f'$

إذا كان  $x \in \mathbb{R}^{-*}$  فإن :  $f'(x) = e^{\frac{1}{x}} + x \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) e^{\frac{1}{x}}$   
 $= \frac{x-1}{x} e^{\frac{1}{x}}$

وواضح أن  $f'(x) > 0$  لكل  $x$  من  $\mathbb{R}^{-*}$   
 وإذا كان  $x \in \mathbb{R}^{+*}$  فإن :

$f'(x) = 2x(1 - \ln x) + x^2 \left(-\frac{1}{x}\right)$   
 $= x(2 - 2\ln x - 1) = x(1 - 2\ln x)$   
 (إشارة  $f'(x)$  على  $\mathbb{R}^{+*}$  هي إشارة  $1 - 2\ln x$ )  
 ولدينا :  $f'(0) = 0$

خلاصة : 
$$\begin{cases} f'(x) = \frac{x-1}{x} e^{\frac{1}{x}} ; x < 0 \\ f'(x) = x(1 - 2\ln x) ; x > 0 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$$

#### ب - جدول تغيرات $f$

|         |           |     |               |           |
|---------|-----------|-----|---------------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $0$ | $\sqrt{e}$    | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | +         | 0   | 0             | -         |
| $f(x)$  | $-\infty$ | 0   | $\frac{e}{2}$ | $-\infty$ |

#### 4- نقطتا الانعطاف

إذا كان  $x \in \mathbb{R}^{-*}$  فإن :  $f'(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} + \frac{x-1}{x} \left(-\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}\right)$   
 $= \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \left(1 - 1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}}$

وبالتالي فإن  $f''(x) \neq 0$  لكل  $x$  من  $\mathbb{R}^{-*}$  ، إذن المنحنى ( $\mathcal{C}$ ) لا يقبل أي نقطة انعطاف أفصولها سالب قطعاً

وإذا كان  $x \in \mathbb{R}^{+*}$  فإن :  $f''(x) = 1 - 2\ln x + x \left(-\frac{2}{x}\right)$   
 $= 1 - 2\ln x - 2 = -1 - 2\ln x$

الجدول التالي يعطي إشارة  $f''(x)$  على  $\mathbb{R}^{+*}$  وتقرر ( $\mathcal{C}$ ) على  $\mathbb{R}^{+*}$  :

|                   |                                                                                     |                                                                                     |                                                                                      |
|-------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| $x$               | $0$                                                                                 | $\frac{1}{\sqrt{e}}$                                                                | $+\infty$                                                                            |
| $f''(x)$          | +                                                                                   | 0                                                                                   | -                                                                                    |
| ( $\mathcal{C}$ ) |  |  |  |

الدالة  $f''$  تنعدم مع تغيير الإشارة في العدد  $\frac{1}{\sqrt{e}}$

إذن المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف I أفصولها موجب قطعاً

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{3}{2e} \quad \text{وأرتوبها} \quad \frac{1}{\sqrt{e}} \quad \text{يساوي}$$

وإذا كان  $x = 0$  فإننا نلاحظ أن الدالة  $f'$  تتعدم في العدد بدون تغيير الإشارة

وهذا يعني أن المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف ثانية أفصولها 0 وأرتوبها  $f(0) = 0$  أي النقطة O .

خلاصة : المنحنى (C) يقبل فعلاً نقطتي انعطاف هما

$$I\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, \frac{3}{2e}\right) \quad \text{و} \quad O(0, 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x e^{\frac{1}{x}} - x - 1) = 0 \quad : \quad \text{لنبين أن} \quad 1-5$$

$$\text{نضع} \quad t = \frac{1}{x} \quad \text{ومنه} \quad x = \frac{1}{t}$$

عندما  $x$  يؤول إلى  $-\infty$  فإن  $t$  يؤول إلى  $0^-$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{\frac{1}{x}} - x - 1 = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{1}{t} e^t - \frac{1}{t} - 1 \quad : \quad \text{إذن}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{e^t - 1}{t} - 1 = 1 - 1 = 0$$

ب - دراسة الفرعين اللانهائيين

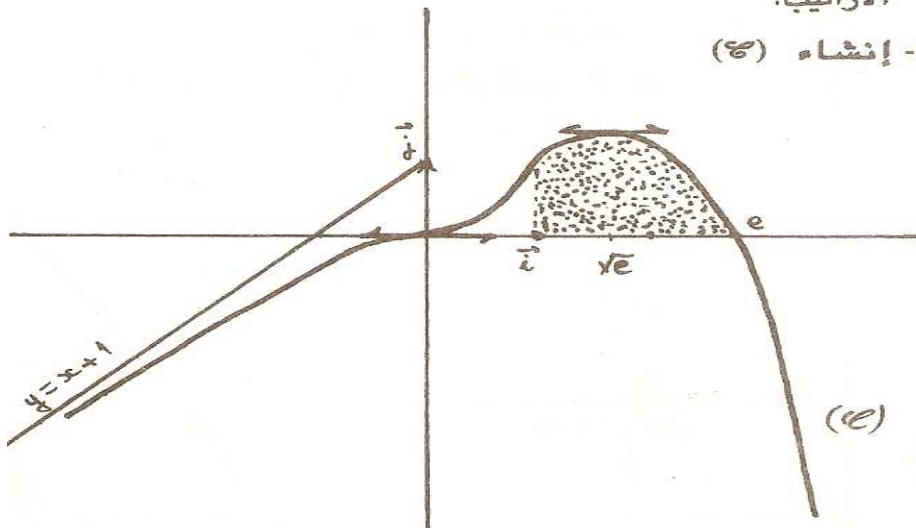
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x + 1) = 0 \quad \text{حسب نتيجة السؤال السابق لدينا}$$

إذن المنحنى (C) يقبل بجوار  $-\infty$  مقارباً ماثلاً معادلته :  $y = x + 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - \ln x) = -\infty \quad : \quad \text{لدينا}$$

إذن المنحنى (C) يقبل بجوار  $+\infty$  فرعاً شلجماً اتجاهه محور الأرتيب.

6- إنشاء (C)



[www.Achamel.net](http://www.Achamel.net)

cours pratiques en lignes

[www.achamel.info](http://www.achamel.info)  
[www.Achamel.net](http://www.Achamel.net)  
[www.Achamel.org](http://www.Achamel.org)  
[www.Achamel.ma](http://www.Achamel.ma)