

1-أ- لنبين بالترجع أن : $U_n - 1 \leq 0$ لكل n من IN^*

$$* \text{ بما أن : } U_n - 1 = \frac{1}{3} - 1$$

$$= -\frac{2}{3}$$

$$\text{فإن : } U_1 - 1 \leq 0$$

إذن الخاصية صحيحة من أجل : $n=1$

• ليكن n عنصرا من IN^*

نفترض أن : $U_n - 1 \leq 0$ ولنبين أن $U_{n+1} - 1 \leq 0$

$$\text{لدينا : } U_{n+1} - 1 = \frac{n+3+2nU_n}{3n+3} - 1$$

$$= \frac{n+3+2nU_n-3n-3}{3n+3} = \frac{2n(U_n-1)}{3n+3}$$

$$\text{وبما أن : } U_n - 1 \leq 0 \text{ و } \frac{2n}{3n+3} > 0$$

$$\text{فإن : } \frac{2n(U_n-1)}{3n+3} \leq 0$$

$$\text{أي أن : } U_{n+1} - 1 \leq 0$$

إذن : $(\forall n \in IN^*) U_n - 1 \leq 0$

ب- لنبين أن $(U_n)_{n \in IN^*}$ تزايدية

ليكن n عنصرا من IN^*

$$\text{لدينا : } U_{n+1} - U_n = \frac{n+3+2nU_n}{3n+3} - U_n$$

$$= \frac{n+3+2nU_n-3nU_n-3U_n}{3n+3} = \frac{n+3-nU_n-3U_n}{3n+3}$$

$$= \frac{(n+3)-U_n(n+3)}{3n+3} = \frac{(n+3)(U_n-1)}{3n+3}$$

$$\text{وبما أن } U_n - 1 \leq 0 \text{ و } -\frac{(n+3)}{3n+3} < 0$$

$$\text{فإن : } -\frac{(n+3)(U_n-1)}{3n+3} \geq 0$$

$$\text{أي : } U_{n+1} - U_n \geq 0$$

إذن المتتالية بالفعل تزايدية.

ج- الاستنتاج

المتتالية تزايدية ومكبورة بالعدد 1 (لأن $U_n \leq 1$ لكل n من IN^*)

حسب نتيجة السؤال 1-أ-

إذن المتتالية هي بالفعل متقاربة.

2-أ- لنبين أن $(V_n)_{n \in IN^*}$ هندسية أساسها $\frac{2}{3}$

ليكن n عنصرا من IN^*

لدينا :

$$V_{n+1} = (n+1)(1-U_{n+1})$$

$$= (n+1) \left(1 - \frac{n+3+2nU_n}{3(n+1)} \right) = \frac{(n+1)(3n+3-n-3-2nU_n)}{3(n+1)}$$

$$= \frac{2n}{3}(1-U_n) = \frac{2}{3}V_n$$

إذن المتتالية $(V_n)_{n \in IN^*}$ هي بالفعل هندسية أساسها $\frac{2}{3}$

ب- حساب U_n بدلالة n

ليكن n عنصرا من IN^*

لدينا: $V_n = n - nU_n$

يعني أن: $nU_n = n - V_n$

إذن: $U_n = 1 - \frac{V_n}{n}$

وبما أن $(V_n)_{n \in IN^*}$ هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$ وحدها الأول

$$V_1 = 1(1-U_1) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$V_n = V_1 q^{n-1}$$

$$= \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} = \left(\frac{2}{3} \right)^n$$

وبالتالي فإن $U_n = 1 - \frac{1}{n} \left(\frac{2}{3} \right)^n$ لكل n من IN^*

ج- حساب نهاية $(U_n)_{n \in IN^*}$

بما أن: $U_n = 1 - \frac{1}{n} \left(\frac{2}{3} \right)^n$ لكل n من IN^*

و:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n = 0 \quad \left(\text{لأن } -1 < \frac{2}{3} < 1 \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \text{و}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 1 - 0$$

$$= 1$$

3- حساب $S_n = U_1 + 2U_2 + \dots + nU_n$ بدلالة n

ليكن n عنصرا من IN^*

بما أن: $V_n = n - nU_n$

$$V_1 = 1 - U_1 \quad \text{فإن:}$$

$$V_2 = 2 - 2U_2 \quad \text{و}$$

$$V_3 = 3 - 3U_3 \quad \text{و}$$

.

.

$$V_{n-1} = n-1 - (n-1)U_{n-1} \text{ : و.}$$

$$V_n = n - nU_n$$

$$V_1 + V_2 + \dots + V_n = (1+2+\dots+n) - (U_1 + 2U_2 + \dots + nU_n) \text{ : ومنه}$$

$$V_1 + V_2 + \dots + V_n = (1+2+\dots+n) - S_n \text{ أي :}$$

$$S_n = (1+2+\dots+n) - (V_1 + V_2 + \dots + V_n) \text{ وبالتالي فإن :}$$

وبما أن $1+2+\dots+n$ هو مجموع n حدا أولا لمتتالية حسابية أساسها 1 وحدها الأول 1 فإن :

$$1+2+\dots+n = \frac{n(1+n)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$V_1 = \frac{2}{3} \text{ وحدها الأول } q = \frac{2}{3} \text{ هندسية أساسها } (V_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ وبما أن}$$

$$V_1 + V_2 + \dots + V_n = V_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \text{ فإن :}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{1}{3}} = 2 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2} - 2 + 2\left(\frac{2}{3}\right)^n \text{ إذن :}$$

$$= \frac{n^2 + n - 4}{2} + 2\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$S_n = \frac{n^2 + n - 4}{2} + 2\left(\frac{2}{3}\right)^n \text{ وبالتالي فإن : لكل } n \text{ من } \mathbb{N}^*$$