

I - 1- تحديد a و b

لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا :

$$h''(x) = 0 \quad \text{و} \quad h'(x) = a$$

إذن تكون الدالة h حلا للمعادلة (E) إذا وفقط إذا كان

$$\text{لكل } x \text{ من } \mathbb{R} \quad 0 - 4a - 5(ax + b) = -5x - 9$$

$$\text{أي :} \quad -5ax - 4a - 5b = -5x - 9 \quad \text{لكل } x \text{ من } \mathbb{R}$$

$$\text{أي} \quad -5a = -5 \quad \text{و} \quad -4a - 5b = -9$$

$$\text{أي} \quad a = 1 \quad \text{و} \quad b = 1$$

$$\text{وبالتالي فإن} \quad h(x) = x + 1$$

2- حل المعادلة (E)

بين أن حلول المعادلة $y'' - 4y' - 5y = 0$ هي الدوال

$$x \mapsto \alpha e^{5x} + \beta e^{-x}$$

حيث $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

ثم استنتج أن حلول المعادلة (E) هي الدوال :

$$x \mapsto \alpha e^{5x} + \beta e^{-x} + x + 1$$

ب- تحديد الحل y بحيث $y(0) = 4$ و $y'(0) = -2$

لتكن y حلا للمعادلة (E)

$$\text{إذن :} \quad (\forall x \in \mathbb{R}) \quad y(x) = \alpha e^{5x} + \beta e^{-x} + x + 1$$

$$\text{ومنه :} \quad (\forall x \in \mathbb{R}) \quad y'(x) = 5\alpha e^{5x} - \beta e^{-x} + 1$$

$$\text{وبالتالي فإن النظام} \quad \begin{cases} y(0) = 4 \\ y'(0) = -2 \end{cases} \quad \text{تكافئ} \quad \begin{cases} \alpha + \beta + 1 = 4 \\ 5\alpha - \beta + 1 = -2 \end{cases}$$

$$\text{أي} \quad \alpha = 0 \quad \text{و} \quad \beta = 3$$

إذن الحل y الذي يحقق $y(0) = 4$ و $y'(0) = -2$ هو الدالة المعرفة

$$\text{على } \mathbb{R} \text{ بمايلي :} \quad y(x) = 3e^{-x} + x + 1$$

II - 1- أ- جدول تغيرات g

• الدالة g معرفة على $\mathbb{R}$ ولدينا :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

$$\text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(1 + \frac{1}{x} + 3 \frac{e^{-x}}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(1 + \frac{1}{x} - 3 \cdot \frac{e^{-x}}{(-x)} \right)$$

$$= +\infty$$

• الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا لكل x من $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 - 3e^{-x} \\ &= 1 - \frac{3}{e^x} \\ &= \frac{e^x - 3}{e^x} \end{aligned}$$

ومنه جدول تغيرات g :

x	$-\infty$	$\ln 3$	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	$2 + \ln 3$	$+\infty$

ب- استنتاج أن : $(\forall x \in \mathbb{R}) g(x) \geq 2 + \ln 3$
 جدول تغيرات الدالة g يبين أن $2 + \ln 3$ هو القيمة الدنيا المطلقة
 للدالة g

إذن $g(x) \geq 2 + \ln 3$ لكل x من $\mathbb{R}$.

2- لفيين أن : $(\forall t \in \mathbb{R}^+) e^{-t} \leq 1 + \frac{t^2}{6} - \frac{t}{3} - \frac{\ln 3}{3}$

نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بمايلي :

$$h(t) = 1 + \frac{t^2}{6} - \frac{t}{3} - \frac{\ln 3}{3} - e^{-t}$$

لدينا لكل t من $\mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned} h'(t) &= \frac{t}{3} - \frac{1}{3} - \frac{\ln 3}{3} + e^{-t} \\ &= \frac{t - 1 - \ln 3 + 3e^{-t}}{3} \\ &= \frac{(t + 1 + 3e^{-t}) - (2 + \ln 3)}{3} \\ &= \frac{g(t) - (2 + \ln 3)}{3} \end{aligned}$$

وبما أن $(\forall t \in \mathbb{R}^+) g(t) \geq 2 + \ln 3$

(حسب نتيجة السؤال السابق)

فإن $h'(t) \geq 0$

ومنه جدول تغيرات الدالة h :

t	0	+	$+\infty$
h'(t)		+	
h(t)	0		

إذن $(\forall t \in \mathbb{R}^+) h(t) \geq 0$

أي $(\forall t \in \mathbb{R}^+) 1 + \frac{t^2}{6} - \frac{t}{3} - \frac{\ln 3}{3} - e^{-t} \geq 0$

أي $(\forall t \in \mathbb{R}^+) 1 + \frac{t^2}{6} - \frac{t}{3} - \frac{\ln 3}{3} \geq e^{-t}$

طريقة ثانية :

ليكن t عنصرا من $\mathbb{R}^+$

رأينا أن $g(x) \geq 2 + \ln 3$ لكل x من $\mathbb{R}$

إذن $(\forall t \geq 0) \int_0^t g(x) dx \geq \int_0^t (2 + \ln 3) dx$

أي $\int_0^t (x + 1 + 3e^{-x}) dx \geq \int_0^t (2 + \ln 3) dx$

أي $\left[\frac{x^2}{2} + x - 3e^{-x} \right]_0^t \geq \left[(2 + \ln 3)x \right]_0^t$

أي $\frac{t^2}{2} + t - 3e^{-t} + 3 \geq (2 + \ln 3)t$

ومنه $\frac{t^2}{2} + t - (2 + \ln 3)t + 3 \geq 3e^{-t}$

إذن $\frac{t^2}{6} - \frac{t}{3} - \frac{\ln 3}{3}t + 1 \geq e^{-t}$ لكل t من $\mathbb{R}^+$

Achamel