

1-أ- لنبين أن U_n هندسية أساسها $\frac{1}{3}$

ليكن n عنصرا من IN

لدينا : $U_{n+1} = a_{n+1} - b_{n+1}$

$$= \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n + 1 - \frac{1}{3}a_n - \frac{2}{3}b_n - 1$$

$$= \frac{1}{3}a_n - \frac{1}{3}b_n = \frac{1}{3}(a_n - b_n) = \frac{1}{3}U_n$$

إذن المتتالية (U_n) هي بالفعل هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$

ب- *كتابة U_n بدلالة n

ليكن n عنصرا من IN

لدينا المتتالية (U_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$ وحدها الأول

$$U_0 = a_0 - b_0 = 3 - 1 = 2$$

$$U_n = U_0 q^n$$

وبالتالي فإن : $U_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$ لكل n من IN

*** الاستنتاج :**

رأينا أن : $U_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$ لكل n من IN

$$\left(-1 < \frac{1}{3} < 1\right) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 2 \cdot 0 = 0$$

2-أ- لنبين بالترجع أن : $V_n \geq 2$ لكل n من IN^*

$$* \text{ لدينا : } V_1 = \frac{a_1 + b_1}{1}$$

$$= a_1 + b_1$$

$$\text{وبما أن : } a_1 = \frac{2}{3}a_0 + \frac{1}{3}b_0 + 1$$

$$= 2 + \frac{1}{3} + 1 = 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$$

$$\text{و } b_1 = \frac{1}{3}a_0 + \frac{2}{3}b_0 + 1$$

$$= 1 + \frac{2}{3} + 1 = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

$$\text{فإن : } V_1 = \frac{10}{3} + \frac{8}{3} + \frac{18}{3} = 6$$

$$\text{إذن : } V_1 \geq 2$$

وهذا يعني أن الخاصية صحيحة من أجل $n=1$

* ليكن n عنصرا من IN^*

نفترض أن $V_n \geq 2$ ولنبين أن : $V_{n+1} \geq 2$

$$\begin{aligned} \text{لدينا : } V_{n+1} - 2 &= \frac{a_{n+1} + b_{n+1}}{n+1} - 2 \\ &= \frac{\frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n + 1 + \frac{1}{3}a_n + \frac{2}{3}b_n + 1}{n+1} - 2 \\ &= \frac{a_n + b_n + 2}{n+1} - 2 = \frac{a_n + b_n + 2 - 2n - 2}{n+1} \\ &= \frac{n\left(\frac{a_n + b_n}{n} - 2\right)}{n+1} = \frac{n(V_n - 2)}{n+1} \\ \text{وبما أن : } V_n - 2 \geq 0 \text{ (لأن } V_n \geq 2 \text{) } &\text{ و } \frac{n}{n+1} > 0 \end{aligned}$$

$$\text{فإن : } \frac{n(V_n - 2)}{n+1} \geq 0 \text{ أي : } V_{n+1} - 2 \geq 0$$

إذن : $V_{n+1} \geq 2$

وبالتالي فإن : $V_n \geq 2 \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$

$$\text{ب- لنبين أن : } V_{n+1} = \frac{2 - V_n}{n+1} + V_n$$

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}^*$

$$\text{لدينا : } V_{n+1} = \frac{a_{n+1} + b_{n+1}}{n+1}$$

$$= \frac{\frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n + 1 + \frac{1}{3}a_n + \frac{2}{3}b_n + 1}{n+1} = \frac{a_n + b_n + 2}{n+1}$$

$$\text{ولدينا : } \frac{2 - V_n}{n+1} + V_n = \frac{2 - V_n + nV_n + V_n}{n+1}$$

$$= \frac{2 + nV_n}{n+1} = \frac{2 + a_n + b_n}{n+1}$$

$$\text{إذن : } V_{n+1} = \frac{2 - V_n}{n+1} + V_n \text{ لكل } n \text{ من } \mathbb{N}^*$$

• استنتاج رتبة $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

حسب السؤال السابق نستنتج أن :

$$V_{n+1} - V_n = \frac{2 - V_n}{n+1}$$

وبما أن : $2 - V_n \leq 0$ (لأن $V_n \geq 2$ لكل n من $\mathbb{N}^*$)

$$\text{فإن : } \frac{2 - V_n}{n+1} \leq 0 \text{ لكل } n \text{ من } \mathbb{N}^*$$

إذن المتتالية $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ تناقصية.

ج- لنبين أن $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ مقاربة .

لدينا المتتالية $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ تناقصية ومصغورة بالعدد 2 (لأن $V_n \geq 2$ لكل n من $\mathbb{N}^*$)

إذن المتتالية $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ هي بالفعل متقاربة .

* لنبين أن $\ell > 0$

بما أن $V_n \geq 2$ لكل n من $\mathbb{N}^*$ و $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متقاربة

فإن $\ell \geq 2$

إذن : $\ell > 0$

*3 حساب كل من a_n و b_n بدلالة U_n و V_n

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}^*$

لدينا : $U_n = a_n - b_n$

و $nV_n = a_n + b_n$

$$\begin{cases} a_n - b_n + a_n + b_n = U_n + nV_n \\ a_n - b_n - a_n - b_n = U_n - nV_n \end{cases} \text{ إذن :}$$

$$\begin{cases} 2a_n = U_n + nV_n \\ -2b_n = U_n - nV_n \end{cases} \text{ أي :}$$

$$\begin{cases} a_n = \frac{U_n + nV_n}{2} \\ b_n = \frac{nV_n - U_n}{2} \end{cases} \text{ وبالتالي فإن :}$$

* حساب نهايتي (a_n) و (b_n)

لدينا : $(a_n) = \frac{U_n + nV_n}{2}$

و $b_n = \frac{nV_n - U_n}{2}$ لكل n من $\mathbb{N}^*$

ونعلم أن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$

و $\lim_{n \rightarrow +\infty} nV_n = +\infty$ (لأن $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ و $\ell > 0$)

إذن $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty$