

*-1 حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 1}{x^3 + 1}$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1$$

* لنبين أن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

لكل x من $] -\infty, 1[$. $f(x) = x - 1 + 2\sqrt{1-x}$

$$= \sqrt{1-x}(2 - \sqrt{1-x})$$

ولدينا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1-x} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2 - \sqrt{1-x} = -\infty$

إذن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

*-2 دراسة قابلية اشتقاق f على اليمين في 1

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{x^3 - 1}{x^3 + 1} - 0}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 - 1}{(x - 1)(x^3 + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{(x - 1)(x^3 + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + x + 1}{x^3 + 1} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

وبالتالي فإن الدالة f قابلة للاشتقاق على اليمين في 1 ولدينا : $f'_d(1) = \frac{3}{2}$

* دراسة قابلية اشتقاق f على اليسار في 1

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - 1 + 2\sqrt{1-x}}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - 1}{x - 1} + \frac{2\sqrt{1-x}}{-(1-x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} 1 - \frac{2\sqrt{1-x}\sqrt{1-x}}{(1-x)\sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} 1 - \frac{2(1-x)}{(1-x)\sqrt{1-x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} 1 - \frac{2}{\sqrt{1-x}} = -\infty \end{aligned}$$

فإن الدالة f غير قابلة للاشتقاق على اليسار في 1.

* التأويل الهندسي :

(ζ) يقبل في النقطة $A(1, 0)$ نصف مماس أحدهما رأسي موجه نحو الأعلى والآخر على اليمين معادلة حامله هي

$$y = \frac{3}{2}(x - 1)$$

*-1-3 لنبين أن f تزايدية قطعاً على $[1, +\infty[$

f دالة قابلة للاشتقاق على $[1, +\infty[$

لكل x من $]1, +\infty[$.

$$f'(x) = \left(\frac{x^3 - 1}{x^3 + 1} \right)'$$

$$= \frac{3x^2(x^3+1) - 3x^2(x^3-1)}{(x^3+1)^2} = \frac{3x^2(x^3+1-x^3+1)}{(x^3+1)^2}$$

$$= \frac{6x^2}{(x^3+1)^2}$$

وبالتالي فإن $f'(x) > 0$ لكل x من $]1, +\infty[$

إن f هي بالفعل دالة تزايدية قطعاً على المجال $]1, +\infty[$

ب- لنبين أن $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x}(1+\sqrt{1-x})}$ لكل x من $] -\infty, 1[$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $] -\infty, 1[$

ولدينا لكل x من $] -\infty, 1[$

$$f'(x) = (x-1+2\sqrt{1-x})'$$

$$= 1 + 2 \cdot \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

$$= \frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}} = \frac{(\sqrt{1-x}-1)(\sqrt{1-x}+1)}{\sqrt{1-x}(\sqrt{1-x}+1)}$$

$$= \frac{1-x-1}{\sqrt{1-x}(\sqrt{1-x}+1)} = \frac{-x}{\sqrt{1-x}(\sqrt{1-x}+1)}$$

ج- جدول تغيرات f

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$ $(-\infty)$ $(\frac{3}{2})$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	1	0	1

4- أ- دراسة الفرعين اللانهائيين

لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

إن (C) يقبل مقارباً أفقياً معادلته $y = 1$ بجوار $+\infty$

وبما أن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1+2\sqrt{1-x}}{x}$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \frac{1}{x} + \frac{2\sqrt{1-x}}{x}$$

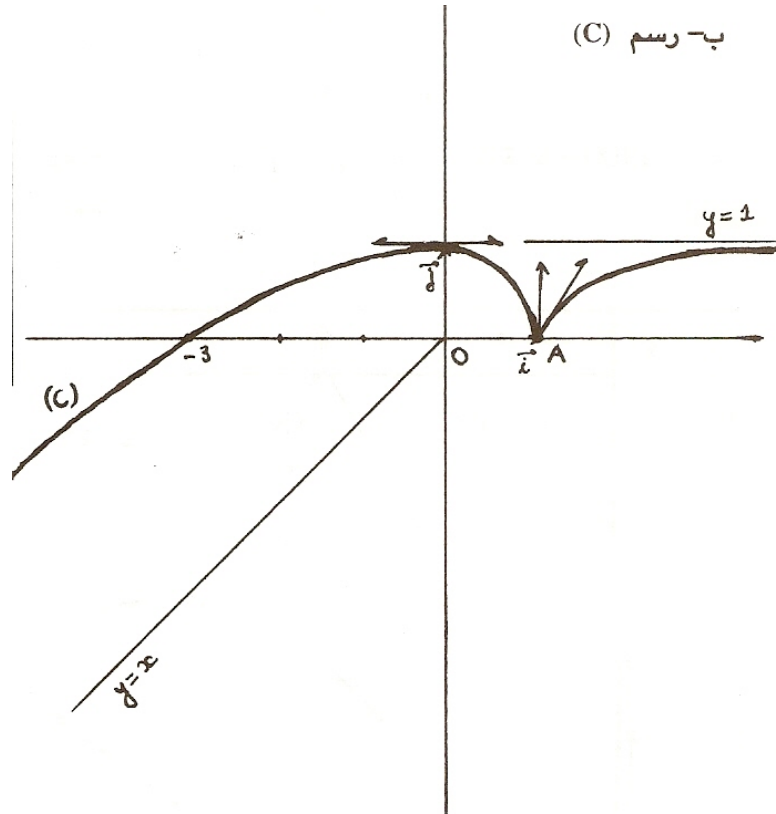
$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \frac{1}{x} + \frac{2(1-x)}{x\sqrt{1-x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \frac{1}{x} + \left(\frac{2}{x} - 2\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

وبما أن :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x - 1 + 2\sqrt{1-x} - x \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} 2\sqrt{1-x} - 1 = +\infty\end{aligned}$$

فإن المنحنى (C) يقبل بجوار $-\infty$ فرعا شلجيميا اتجاهه المستقيم ذو المعادلة $y = x$



5- أ- لنبين أن g تقابل من $[1, +\infty[$ نحو مجال I

بما أن الدالة g متصلة وتزايدية قطعاً على المجال $[1, +\infty[$

فإن فهي تقابل من $[1, +\infty[$ نحو المجال :

$$J = f([1, +\infty[) = [0, 1[$$

إذن فهي تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة من $[0, 1[$ نحو $[1, +\infty[$

ب- حساب $g^{-1}(x)$

ليكن x عنصراً من $[0, 1[$ و y عنصراً من $[1, +\infty[$

لدينا : $g^{-1}(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x$

$$\Leftrightarrow \frac{y^3 - 1}{y^3 + 1} = x$$

$$\Leftrightarrow y^3 - 1 = x(y^3 + 1)$$

$$\Leftrightarrow y^3 - 1 = xy^3 + x$$

$$\Leftrightarrow y^3 - xy^3 = x + 1$$

$$\Leftrightarrow y^3(1 - x) = x + 1$$

$$\Leftrightarrow y^3 = \frac{x+1}{1-x}$$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt[3]{\frac{x+1}{1-x}}$$

$$\text{إذن } g^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x+1}{1-x}} \text{ لكل } x \text{ من }]0,1[$$

$$\text{ج- لنبين أن } g^{-1} \text{ دالة أصلية للدالة } x \rightarrow \frac{2}{\sqrt[3]{(x^3 - x^2 - x + 1)^2}}$$

ليكن x عنصرا من المجال $]0,1[$

$$\begin{aligned} [g^{-1}(x)]' &= \left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{1-x}} \right)' \\ &= \left[\left(\frac{x+1}{1-x} \right)^{\frac{1}{3}} \right]' \end{aligned} \quad \text{لدينا :}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3} \left(\frac{x+1}{1-x} \right)' \left(\frac{x+1}{1-x} \right)^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{(1-x)^2} \cdot \left(\frac{x+1}{1-x} \right)^{-\frac{2}{3}} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{(1-x)^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{x+1}{1-x} \right)^{\frac{2}{3}}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{[(1-x)^3]^{\frac{2}{3}} \left(\frac{x+1}{1-x} \right)^{\frac{2}{3}}} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\left(\frac{(1-x)^3(x+1)}{1-x} \right)^{\frac{2}{3}}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{[(1-x)^2(x+1)]^{\frac{2}{3}}} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{[(1-2x+x^2)(x+1)]^{\frac{2}{3}}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{(x+1-2x^2-2x+x^3+x^2)^{\frac{2}{3}}} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{(x^3-x^2-x+1)^{\frac{2}{3}}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{(x^3-x^2-x+1)^2}} \end{aligned}$$

$$\text{إذن } g^{-1} \text{ هي بالفعل دالة أصلية للدالة } x \rightarrow \frac{2}{3\sqrt[3]{(x^3-x^2-x+1)^2}} \text{ على المجال }]0,1[$$