

(1) أ- دالة زوجية :

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$. لدينا :

$$f(-x) = \frac{e^{-2x} + 1}{(e^{-x} + 1)^2}$$

ولدينا من جهة أخرى :

$$e^{-2x} + 1 = \frac{1}{e^{2x}} + 1 = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x}}$$

و

$$(e^{-x} + 1)^2 = \left(\frac{1}{e^x} + 1\right)^2 = \left(\frac{e^x + 1}{e^x}\right)^2 = \frac{(e^x + 1)^2}{e^{2x}}$$

ومنه :

$$\frac{e^{-2x} + 1}{(e^{-x} + 1)^2} = \frac{\frac{e^{2x} + 1}{e^{2x}}}{\frac{(e^x + 1)^2}{e^{2x}}} = \frac{e^{2x} + 1}{(e^x + 1)^2}$$

إذن : $f(-x) = \frac{e^{2x} + 1}{(e^x + 1)^2} = f(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$.

أي : f دالة زوجية .

ب - حساب النهاية :

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}_+^*$. لدينا :

$$f(x) = \frac{e^{2x} + 1}{(e^x + 1)^2}$$

$$= \frac{e^{2x} \left(1 + \frac{1}{e^{2x}}\right)}{\left(e^x \left(1 + \frac{1}{e^x}\right)\right)^2}$$

$$= \frac{e^{2x} \left(1 + \frac{1}{e^{2x}}\right)}{e^{2x} \left(1 + \frac{1}{e^x}\right)^2}$$

$$= \frac{1 + \frac{1}{e^{2x}}}{1 + \frac{1}{e^x}}$$

ومنه

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{e^{2x}}}{1 + \frac{1}{e^x}} = 1$$

لأن

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{2x}} = 0$$

التأويل الهندسي :

لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ ومنه منحنى f يقبل مقاربا موازيا

لمحور الأفاصيل معادلته : $y = 1$.

(2) حساب $f'(x)$:

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$. لدينا :

$$f(x) = \frac{e^{2x} + 1}{(e^x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(e^{2x} + 1)' (e^x + 1)^2 - (e^{2x} + 1) [(e^x + 1)^2]'}{(e^x + 1)^4} \quad \text{ومنه :}$$

$$= \frac{2(e^x + 1)[e^{2x}(e^x + 1) - e^x(e^{2x} + 1)]}{(e^x + 1)^4}$$

$$\text{إذن : } f'(x) = \frac{2e^x(e^x - 1)}{(e^x + 1)^3} \quad \text{لكل } x \text{ من } \mathbb{R}.$$

جدول تغيرات f :

$$\begin{aligned} f'(x) \geq 0 &\Leftrightarrow e^x - 1 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x \geq 0 \end{aligned} \quad \text{لدينا :}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'(x)		0	
f(x)	1	$\frac{1}{2}$	1

$$f(0) = \frac{1}{2}$$

(3) أ- حساب f''(x) :

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$. لدينا :

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{e^{2x} - e^x}{(e^x + 1)^3}$$

$$f''(x) = 2 \cdot \frac{(e^{2x} - e^x)' (e^x + 1)^3 - (e^{2x} - e^x) [(e^x + 1)^3]'}{(e^x + 1)^6} \quad \text{ومنه}$$

$$= 2 \cdot \frac{(2e^{2x} - e^x)(e^x + 1)^3 - 3e^x(e^{2x} - e^x)(e^x + 1)^2}{(e^x + 1)^6}$$

$$= 2 \cdot \frac{e^x(e^x + 1)^2[(2e^x - 1)(e^x + 1) - 3(e^{2x} - e^x)]}{(e^x + 1)^6}$$

$$= \frac{2e^x(-e^{2x} + 4e^x - 1)}{(e^x + 1)^4}$$

$$\text{إذن : } f''(x) = -\frac{2e^x(e^{2x} - 4e^x + 1)}{(e^x + 1)^4} \quad \text{لكل } x \text{ من } \mathbb{R}.$$

ب - نقطتا الانعطاف :

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$. لدينا :

$$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-2e^x(e^{2x} - 4e^x + 1)}{(e^x + 1)^4} = 0$$

وبما أن $e^x > 0$ و $e^x + 1 > 0$ فإن

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 4e^x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (e^x)^2 - 4e^x + 1 = 0$$

المميز المختصر لثلاثية الحدود $X^2 - 4X + 1$ هو

$$\Delta' = 4 - 1(1) = 3 \quad \text{أي} \quad \sqrt{\Delta'} = \sqrt{3}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 2 + \sqrt{3} \quad \text{أو} \quad e^x = 2 - \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow x = \ln(2 + \sqrt{3}) \quad \text{أو} \quad x = \ln(2 - \sqrt{3}) \quad \bullet$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -2e^x(e^{2x} - 4e^x + 1) > 0$$

$$\Leftrightarrow (e^x)^2 - 4e^x + 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow 2 - \sqrt{3} < e^x < 2 + \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \ln(2 - \sqrt{3}) < x < \ln(2 + \sqrt{3})$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < \ln(2 - \sqrt{3}) \quad \text{أو} \quad x > \ln(2 + \sqrt{3}) \quad \bullet$$

إذن : منحنى f يقبل نقطتي انعطاف افصولاهما :

$$\ln(2 - \sqrt{3}) \quad \text{و} \quad \ln(2 + \sqrt{3})$$

(4) رسم منحنى f :

