

نعتبر في الفضاء $\mathcal{E}$ المنسوب لعلم متعامد منظم مباشر $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$
النقط $A(1, 0, 0)$ ، $B(0, 2, 0)$ ، $C(0, 0, 2)$.

(1) أ - لدينا $\vec{AB}(-1, 2, 0)$ و $\vec{AC}(-1, 0, 2)$

إذن :

$$\begin{aligned}\vec{AB} \wedge \vec{AC} &= \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= 4 \vec{i} + 2 \vec{j} + 2 \vec{k}\end{aligned}$$

ب - بما أن $\vec{AB} \wedge \vec{AC} \neq \vec{0}$ فإن النقط A, B, C غير مستقيمية

ج - لدينا $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ متجهة منظمية على (ABC)

إذن $(ABC) : 4x + 2y + 2z + \alpha = 0$

وبما أن $A(1, 0, 0) \in (ABC)$ فإن $4(1) + 2(0) + 2(0) + \alpha = 0$ أي $\alpha = -4$

ومنه فإن : $(ABC) : 4x + 2y + 2z - 4 = 0$

$$(ABC) : 2x + y + z - 2 = 0$$

أي

(2) لدينا

$$\begin{aligned}d(O, (ABC)) &= \frac{|2(0) + 0 + 0 - 2|}{\sqrt{4 + 1 + 1}} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{3}\end{aligned}$$

بما أن $\frac{\sqrt{6}}{3}$ هو شعاع (S) فإن (ABC) مماس لـ (S).

(3) أ. لدينا : $\overrightarrow{OE} = -k$ أي $E(0, 0, -1)$

$$\overrightarrow{BF} = 2\vec{i}$$

$$\overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OB} = 2\vec{i}$$

$$\overrightarrow{OF} = 2\vec{i} + \overrightarrow{OB}$$

$$= 2\vec{i} + 2\vec{j}$$

إذن : $F(2, 2, 0)$

ومنه : $\overrightarrow{EF}(2, 2, 1)$

بما أن (Δ) مستقيم مار من E وموجه بـ $\overrightarrow{EF}$.

وبالتالي :

$$(\Delta) : \begin{cases} x = 2t \\ y = 2t \\ z = -1 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$M(x, y, z) \in (S') \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$$

$$\Leftrightarrow x \cdot x + y(y - 2) + z \cdot z = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2y = 0$$

ومنه فإن : $(S') : x^2 + y^2 + z^2 - 2y = 0$

ج. * لدينا $\Omega'(0, 1, 0)$ مركز (S') و $r' = 1$ شعاع (S')

لنحسب $d(\Omega', (\Delta))$.

$$d(\Omega', (\Delta)) = \frac{||\overrightarrow{E\Omega'} \wedge \overrightarrow{EF}||}{||\overrightarrow{EF}||}$$

بما أن : $\overrightarrow{E\Omega'}(0, 1, 1)$ و $\overrightarrow{EF}(2, 2, 1)$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{E\Omega'} \wedge \overrightarrow{EF} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= -\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k} \end{aligned}$$

$$d(\overrightarrow{E\Omega'}, \overrightarrow{EF}) = \frac{\sqrt{1+4+4}}{\sqrt{4+4+1}} = 1$$

إذن :

ومنه فإن (Δ) مماس لـ (S') .

* تحديد نقطة تقاطع (Δ) و (S') .

$$\begin{aligned} I(x, y, z) \in (\Delta) \cap (S') &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2y = 0 \\ x = 2t \\ y = 2t \\ z = -1 + t \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 4t^2 + 4t^2 + 1 - 2t + t^2 - 4t = 0 \\ x = 2t \\ y = 2t \\ z = -1 + t \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 9t^2 - 6t + 1 = 0 \\ x = 2t \\ y = 2t \\ z = -1 + t \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (3t - 1)^2 = 0 \\ x = 2t \\ y = 2t \\ z = -1 + t \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{3} \\ x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{2}{3} \\ z = -\frac{2}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

$$(\Delta) \cap (S') = \left\{ I\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) \right\}$$

ومنه فإن :