

1-أ. حساب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} (\sqrt{x} - 1)$$

$$= +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x - \sqrt{x} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

ب- تحديد الفرعين اللانهائيين

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

فإن (C) يقبل مقاربا رأسيا معادلته $x = 0$ أي محور الأرتيب.

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{\sqrt{x}}{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x\sqrt{x}} = 1 - 0 + 0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}$$

فإن (C) يقبل بجوار $+\infty$ فرعا شلجما اتجاهه المستقيم ذو المعادلة $y = x$

2-أ. حساب $f'(x)$

الدالة f قابلة للاشتقاق على IR^{+*} ولدينا لكل x من IR^{+*} :

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}$$

$$= 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} = \frac{2x\sqrt{x} - x - 1}{2x\sqrt{x}}$$

$$\text{ولدينا: } (2x + \sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1) = 2x\sqrt{x} - 2x + x - \sqrt{x} + \sqrt{x} - 1$$

$$= 2x\sqrt{x} - x - 1$$

$$\text{إذن: } f'(x) = \left(\frac{2x + \sqrt{x} + 1}{2x\sqrt{x}} \right) (\sqrt{x} - 1) \quad \text{لكل } x \text{ من }]0, +\infty[$$

ب- جدول تغيرات f:

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $\sqrt{x} - 1$

ومنه جدول تغيرات الدالة f :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	0
$f(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

3-أ. دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C) و (Δ)

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}^{+*}$

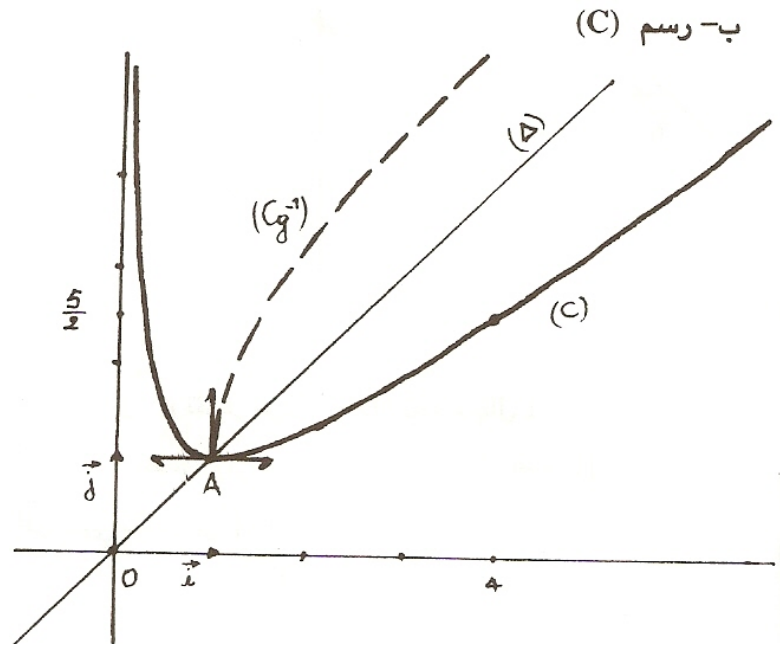
$$\text{لدينا : } f(x) - x = \frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}$$

$$= \frac{1-x}{\sqrt{x}}$$

إشارة $f(x) - x$ هي إشارة $1-x$

ومنه نستنتج الجدول التالي الذي يعطي إشارة $f(x) - x$ والوضع النسبي للمنحنى (C) والمستقيم (Δ)

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x) - x$	+	0	-
وضع (C) و (Δ)	(C) فوق (Δ)	(Δ) يقطع (C) في A(1, 1)	(C) تحت (Δ)



4-أ- لنبين أن g تقبل دالة عكسية g^{-1}

بما أن الدالة g متصلة وتزايدية قطعاً على المجال $[1, +\infty[$

فإنها تقابل من $[1, +\infty[$ نحو المجال $[1, +\infty[$

$$f([1, +\infty[) = [1, +\infty[$$

إذن فهي تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة من $[1, +\infty[$ نحو $[1, +\infty[$

ومنه فإن : $D_{g^{-1}} = [1, +\infty[$

ب- رسم $(C_{g^{-1}})$

المنحنى $(C_{g^{-1}})$ هو مماثل لمنحنى f على $[1, +\infty[$ بالنسبة للمستقيم (Δ) ذي المعادلة : $y = x$ (أنظر الشكل)

5-أ- لنبين بالترجع أن $a_n > 1$ لكل n من IN

* لدينا : $a_0 = 2$ ، إذن $a_0 > 1$

وهذا يعني أن الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$

• ليكن n عنصراً من IN

لنفترض أن $a_n > 1$ ولنبين أن $a_{n+1} > 1$

بما أن : $a_n > 1$

و f تزايدية قطعاً على المجال $[1, +\infty[$

فإن : $f(a_n) > f(1)$

أي أن $a_{n+1} > 1$

إذن : $(\forall n \in IN) a_n > 1$

ب- لنبين أن (a_n) تناقصية

لذلك سنبين بالترجع أن : $a_{n+1} < a_n$ لكل n من IN

• بما أن : $a_0 = 2$

$$a_1 = f(a_0) = f(2) = \frac{2\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \text{ و}$$

فإن : $a_1 < a_0$

إذن الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$

• ليكن n عنصرا من IN

لنفترض أن : $a_n < a_{n+1}$ ولنبين أن : $a_{n+1} < a_{n+2}$

لدينا : $a_{n+1} < a_n$

و f تزايدية قطعا على المجال $[1, +\infty[$

إذن : $f(a_{n+1}) < f(a_n)$

إذن : $a_{n+2} < a_{n+1}$

طريقة ثانية:

ليكن n عنصرا من IN

بما أن :

$$a_{n+1} - a_n = f(a_n) - a_n = a_n - \sqrt{a_n} + \frac{1}{\sqrt{a_n}} - a_n = \frac{1 - a_n}{\sqrt{a_n}}$$

وبما أن : $\sqrt{a_n} > 0$ و $1 - a_n < 0$ (لأن $a_n > 1$)

فإن : $\frac{1 - a_n}{\sqrt{a_n}} < 0$

وبالتالي فإن المتتالية (a_n) بالفعل تناقصية

ج- * استنتاج أن (a_n) متقاربة

بما أن المتتالية (a_n) تناقصية ومصغورة بالعدد 1 (لأن $a_n > 1$ لكل n من IN)

فإنها متقاربة

• **تحديد ℓ نهاية المتتالية (a_n)**

بما أن الدالة f متصلة على المجال $[1, +\infty[$

فإن النهاية ℓ تحقق $f(\ell) = \ell$

$$\frac{1 - \ell}{\sqrt{\ell}} = 0 \quad \text{أي} \quad \ell - \sqrt{\ell} + \frac{1}{\sqrt{\ell}} = \ell$$

إذن : $\ell = 1$