

1- تحديد D :

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$. لدينا :

$$f(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x + 2 \ln \frac{x^2 + 3}{4x} \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 + 3}{4x} > 0$$

$$\Leftrightarrow 4x > 0$$

$$\Leftrightarrow x > 0$$

إذن : مجموعة تعريف f هي : $D =]0, +\infty[$.

2- حساب النهاية الأولى :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + 2 \ln \frac{x^2 + 3}{4x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x^2 + 3}{4x} = +\infty \text{ فإن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3}{4x} = +\infty \text{ وبما أن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \ln \frac{x^2 + 3}{4x} \right) = +\infty \text{ ومنه :}$$

Achamel

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{أي :}$$

حساب النهاية الثانية :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(x + \ln \frac{x^2 + 3}{4x} \right)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln \frac{x^2 + 3}{4x} = +\infty \quad \text{فإن} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x^2 + 3}{4x} = +\infty \quad \text{وبما أن}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(x + \ln \frac{x^2 + 3}{4x} \right) = +\infty \quad \text{ومنه :}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty \quad \text{أي :}$$

3-a حساب f'(x) :

ليكن x عنصرا من D . لدينا :

$$f(x) = x + 2 \ln \frac{x^2 + 3}{4x}$$

$$f'(x) = 1 + 2 \cdot \left(\ln \frac{x^2 + 3}{4x} \right)' \quad \text{ومنه :}$$

$$\left(\ln \frac{x^2 + 3}{4x} \right)' = \frac{\left(\frac{x^2 + 3}{4x} \right)'}{\frac{x^2 + 3}{4x}} \quad \text{ولدينا :}$$

$$= \frac{2x(4x) - 4(x^2 + 3)}{(4x)^2} \times \frac{4x}{x^2 + 3}$$

$$= \frac{(x^2 - 3)}{x(x^2 + 3)}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{2(x^2 - 3)}{x(x^2 + 3)} \quad \text{وبالتالي :}$$

$$= \frac{x(x^2 + 3) + 2(x^2 - 3)}{x(x^2 + 3)}$$

$$= \frac{x^3 + 2x^2 + 3x - 6}{x(x^2 + 3)}$$

نلاحظ أن 1 جذر للحدود $x^3 + 2x^2 + 3x - 6$. ومنه :

$$x^3 + 2x^2 + 3x - 6 = (x - 1)(x^2 + 3x + 6)$$

$$f'(x) = \frac{(x - 1)(x^2 + 3x + 6)}{x(x^2 + 3)} \quad \text{إذن :}$$

(b) جدول تغيرات f :

ليكن x عنصرا من D .

• لدينا : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x^2+3x+6)}{x(x^2+3)}$

$\Leftrightarrow x-1=0$ أو $x^2+3x+6=0$

مميز ثلاثية الحدود x^2+3x+6 هو $\Delta = 9 - 24 = -15$

ومنه : $x^2+3x+6 > 0$ لكل x من $\mathbb{R}$.

وبالتالي : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x-1=0$

$\Leftrightarrow x=1$

• ولدينا : $f'(x) > 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+3x+6) > 0$

$\Leftrightarrow x-1 > 0$

$\Leftrightarrow x > 1$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

$f(1) = 1 + 2 \ln \frac{1+3}{4} = 1$

(a-4) التحقق من المتساوية :

ليكن x عنصرا من D . لدينا :

$\ln \frac{x^2+3}{4x} = \ln(x^2+3) - \ln 4x$

$= \ln x^2 \left(1 + \frac{3}{x^2}\right) - \ln 4 - \ln x$

$= \ln x^2 + \ln \left(1 + \frac{3}{x^2}\right) - \ln 2^2 - \ln x$

$= 2 \ln x + \ln \left(1 + \frac{3}{x^2}\right) - 2 \ln 2 - \ln x$

$= \ln x + \ln \left(1 + \frac{3}{x^2}\right) - 2 \ln 2$

$f(x) = x + 2 \ln \frac{x^2+3}{4x}$

$= x + 2 \ln x + 2 \ln \left(1 + \frac{3}{x^2}\right) - 4 \ln 2$

(b) دراسة الفروع اللانهائية :

• لدينا : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$

ومنه : (C) يقبل محور الارايب مستقيما مقاربا .

• لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ لنحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{2 \ln x}{x} + \frac{2}{x} \cdot \ln \left(1 + \frac{3}{x^2} \right) - \frac{4 \ln 2}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \quad \text{ومنه :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} \cdot \ln \left(1 + \frac{3}{x^2} \right) = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad (\text{لأن})$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 \ln 2}{x} = 0 \quad \text{و} \right)$$

$$\text{لنحسب} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) \quad \text{لدينا :}$$

$$f(x) - x = 2 \ln x + 2 \ln \left(1 + \frac{3}{x^2} \right) - 4 \ln 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = +\infty$$

$$(\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{x^2} \right) = 0 \quad \text{لأن})$$

إذن : (C) يقبل فرعاً شلجماً في اتجاه $y = x$.
 (c) **الوضع النسبي لـ (C) والمستقيم $y = x$** :
 ليكن x عنصراً من D .

$$f(x) = x \Leftrightarrow x + 2 \ln \frac{x^2 + 3}{4x} = x \quad \text{لدينا :}$$

$$\Leftrightarrow \ln \frac{x^2 + 3}{4x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 + 3}{4x} = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$

المميز المختصر لـ $x^2 - 4x + 3$ هو $\Delta' = 4 - 3 = 1$.ومنه

$$\text{جذراها هما : } x_1 = \frac{2+1}{1} = 3 \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{2-1}{1} = 1$$

$$f(x) = x \Leftrightarrow x = 1 \quad \text{أو} \quad x = 3$$

أي (C) يقطع المستقيم $y = x$ في النقطتين (1, 1) و (3, 3) .
 • ولدينا :

$$f(x) > x \Leftrightarrow x + 2 \ln \frac{x^2 + 3}{4x} > x$$

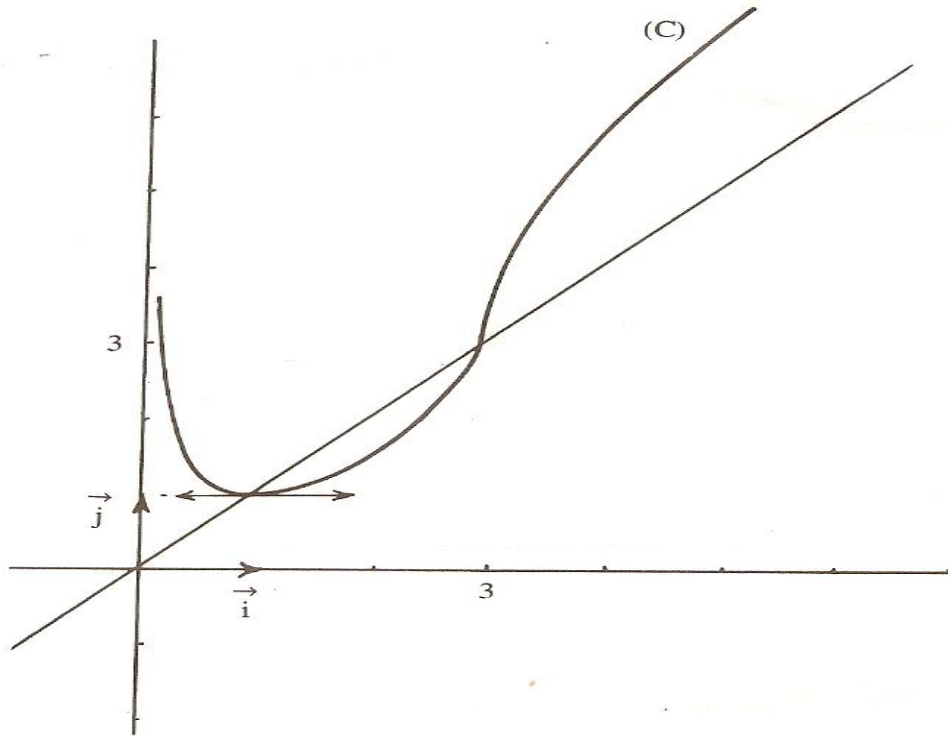
$$\Leftrightarrow 2 \ln \frac{x^2 + 3}{4x} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 + 3}{4x} > 1$$

$$\Leftrightarrow 0 < x < 1 \quad \text{أو} \quad x > 3$$

إذن : (C) فوق المستقيم $y = x$ إذا كان x ينتمي إلى
 $]0, 1[\cup]3, +\infty[$.

• ولدينا : $f(x) < x \Leftrightarrow 1 < x < 3$
أي: (C) تحت المستقيم $y = x$ إذا كان x ينتمي إلى $]1, 3[$.
(d) رسم المنحنى :



Achamel