

1- حساب U_2

$$\begin{aligned} \text{بما أن : } U_2 &= U_{1+1} \\ &= \frac{2 \times 1 + 2}{3 \times 1} U_1 = \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{3} \\ U_2 &= \frac{8}{9} \quad \text{فإن :} \end{aligned}$$

2- أ- لنبين أن المتتالية $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ هندسية

$$\begin{aligned} \text{ليكن } n \text{ عنصرا من } \mathbb{N}^* \\ \text{بما أن : } V_{n+1} &= \frac{1}{n+1} U_{n+1} \\ &= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{2n+2}{3n} U_n = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{2(n+1)}{3n} U_n \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{U_n}{n} = \frac{2}{3} V_n \end{aligned}$$

فإن المتتالية $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$ وحدها الأول:

$$V_1 = \frac{1}{1} U_1 = \frac{2}{3}$$

ب- * كتابة V_n بدلالة n

لدينا $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متتالية هندسية

إذن لكل n من $\mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} V_n &= V_1 \cdot q^{n-1} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \end{aligned}$$

• استنتاج U_n بدلالة n

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}^*$

$$V_n = \frac{U_n}{n} \quad \text{لدينا :}$$

$$U_n = nV_n \quad \text{إذن :}$$

$$= n \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

3- حساب S_n بدلالة n

$$\begin{aligned} \text{لدينا : } S_n &= \frac{U_1}{1} + \frac{U_2}{2} + \frac{U_3}{3} + \dots + \frac{U_n}{n} \\ &= V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n \end{aligned}$$

وبما أن $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$

$$V_1 = \frac{2}{3} \quad \text{وحدها الأول}$$

$$\begin{aligned} S_n &= V_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} && \text{فإن :} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{1}{3}} \\ &= 2 \left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) && \text{إذن :} \end{aligned}$$