

$$\begin{cases} f(x) = x - 1 + 2\sqrt{1-x} ; x \leq 1 \\ f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^3 + 1} ; x \geq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 1}{x^3 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1 \quad * (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

إذن

* لدينا

$$\forall x \in]-\infty, 1] ; f(x) = \sqrt{1-x} (-\sqrt{1-x} + 2)$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1-x} &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (-\sqrt{1-x} + 2) &= -\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{\frac{x^3 - 1}{x^3 + 1} - 0}{x - 1} \quad * (2) \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x^3 + 1)(x-1)} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{x^2 + x + 1}{x^3 + 1} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{3}{2}$$

إذن

ومنه فإن f قابلة للاشتقاق على اليمين في 1 والمنحني (C) يقبل نصف تماس معاملته الموجه $\frac{3}{2}$ على اليمين في النقطة ذات الأفصول 1.

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{x - 1 + 2\sqrt{1-x}}{x - 1} \quad * \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} 1 + \frac{2\sqrt{1-x}}{x - 1} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} 1 - 2\sqrt{\frac{1}{1-x}} = -\infty \end{aligned}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -\infty$$

إذن

ومنه فإن f غير قابلة للاشتقاق على اليسار في 1 والمنحنى (C) يقبل نصف مماس عمودي في النقطة ذات الإحداثيات 1. أ. (3)

$$\forall x \in]1, +\infty[; f'(x) = \frac{3x^2(x^3+1) - 3x^2(x^3-1)}{(x^3+1)^2}$$

$$\forall x \in]1, +\infty[; f'(x) = \frac{6x^2}{(x^3+1)^2} > 0$$

إذن f تزايدية قطعاً على $]1, +\infty[$.

$$\begin{aligned} \text{ب.} \quad \forall x \in]-\infty, 1[; f'(x) &= 1 + \frac{2(-1)}{2\sqrt{1-x}} \\ &= \frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}} \\ &= \frac{1-x-1}{\sqrt{1-x}(\sqrt{1-x}+1)} \end{aligned}$$

$$\forall x \in]-\infty, 1[; f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x}(1+\sqrt{1-x})} \quad \text{إذن}$$

ج.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
f'(x)	+	0	$-\infty$	+
f(x)	$-\infty$	1	0	1

$$(4) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \quad \text{أ. * بما أن}$$

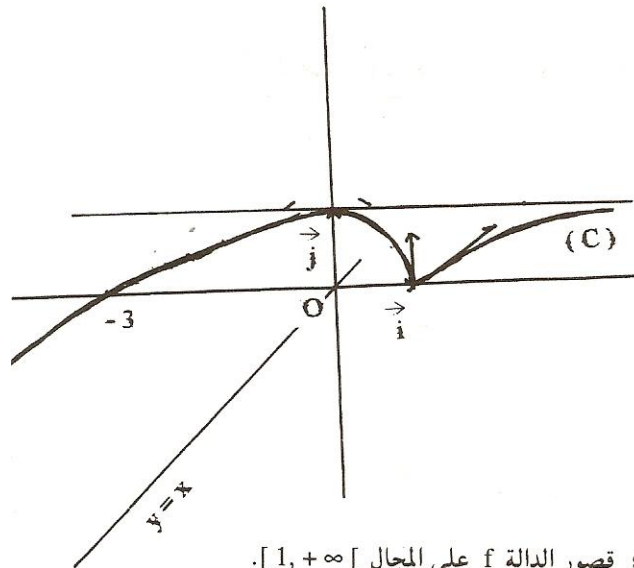
فإن المستقيم ذي المعادلة $y = 1$ مقارب أفقي للمنحنى (C) بجوار $(+\infty)$. *

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1+2\sqrt{1-x}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{2\sqrt{1-x}}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{x} - 2\sqrt{\frac{1-x}{x^2}} \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -1 + 2\sqrt{1-x} = +\infty$$

إذن المنحنى (C) يقبل فرعاً شلجياً اتجاهه هو اتجاه المستقيم ذي المعادلة $y = x$ بجوار $-\infty$.

بـ -



(5) g قصور الدالة f على المجال $[1, +\infty[$.
 أـ من خلال دراسة الدالة f ، g دالة متصلة وتزايدية قطعاً على
 $g([1, +\infty[) = [0, 1[$ و $[1, +\infty[$.
 إذن g تقابل من $[1, +\infty[$ نحو $[0, 1[$.

بـ - $g^{-1} : [0, 1[\longrightarrow [1, +\infty[$

$$x \longrightarrow y = g^{-1}(x)$$

$$y = g^{-1}(x) \Leftrightarrow x = g(y)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{y^3 - 1}{y^3 + 1}$$

$$\Leftrightarrow y^3(x - 1) = -1 - x$$

$$\Leftrightarrow y^3 = \frac{1 + x}{1 - x}$$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt[3]{\frac{1 + x}{1 - x}}$$

$$g^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}$$

إذن

$$\forall x \in]0, 1[; (g^{-1})'(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'}{\sqrt[3]{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}} \quad - \text{ج}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3} \cdot \frac{\frac{2}{(1-x)^2}}{\sqrt[3]{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{(1-x)^2 \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(1-x)^6 \cdot \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{[(1-x)^2(1+x)]^2}} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{[(1-x)^2(1+x)]^2}} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{[(1-2x+x^2)(1+x)]^2}} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(x^3-x^2-x+1)^2}} \end{aligned}$$

إذن الدالة g^{-1} هي دالة أصلية للدالة $x \longrightarrow \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^3-x^2-x+1)^2}}$ على $]0, 1[$.