

1-أ- جدول تغيرات f على I

x	2	3
f(x)	$\frac{12}{5}$	$\frac{17}{6}$

لنبين أن $f(I) \subset I$
من خلال تغيرات الدالة f على المجال I

$$f(I) = \left[\frac{12}{5}, \frac{17}{6} \right] : \text{نستنتج أن}$$

$$\left[\frac{12}{5}, \frac{17}{6} \right] \subset [2, 3] : \text{ولدينا}$$

$$(2 < \frac{12}{5} < \frac{17}{6} < 3) \text{ لأن}$$

$$f(I) \subset I \text{ إذن}$$

$$2 \leq U_n \leq 3 : \text{لنبين بالترجع أن } (\forall n \in \mathbb{N})$$

$$* \text{ من أجل } n=0 : \text{ لدينا } U_0 = 2$$

$$\text{إذن } : 2 \leq U_0 \leq 3$$

$$* \text{ ليكن } n \text{ عنصرا من } \mathbb{N}$$

$$\text{نفترض أن } 2 \leq U_n \leq 3 \text{ وسنبين أن } 2 \leq U_{n+1} \leq 3$$

$$\text{لدينا } : 2 \leq U_n \leq 3 \text{ أي } : U_n \in I$$

$$\text{ونعلم أن } f(I) \subset I$$

$$\text{أي } f(U_n) \in I$$

$$\text{أي } U_{n+1} \in I$$

$$\text{أي } 2 \leq U_{n+1} \leq 3$$

$$\text{إذن } : 2 \leq U_{n+1} \leq 3$$

$$\text{ب- لنبين بالترجع أن المتتالية } (U_n) \text{ تزايدية}$$

$$\text{نبين بالترجع أن } U_n \leq U_{n+1} \text{ لكل } n \text{ من } \mathbb{N}$$

$$* \text{ من أجل } n=0 : \text{ لدينا}$$

$$U_1 = f(U_0) = \frac{5U_0 + 2}{U_0 + 3} = \frac{12}{5} \text{ و } U_0 = 2$$

$$\text{إذن } : U_0 \leq U_1$$

$$* \text{ ليكن } n \text{ عنصرا من } \mathbb{N}$$

$$\text{نفترض أن } U_n \leq U_{n+1} \text{ وسنبين أن } U_{n+1} \leq U_{n+2}$$

$$\text{لدينا } : U_n \leq U_{n+1}$$

$$\text{و } U_n \text{ و } U_{n+1} \text{ عنصرا من } I$$

$$\text{وبما أن } f \text{ تزايدية على } I$$

$$f(U_n) \leq f(U_{n+1}) : \text{فإن}$$

$$U_{n+1} \leq U_{n+2} : \text{إذن}$$

3- تقارب (U_n) وتحديد نهايتها

المتتالية (U_n) تزايدية ومكبورة بالعدد 3 .

إذن فهي متقاربة ونهايتها ℓ تحقق $\ell = f(\ell)$

$$\ell = \frac{5\ell + 2}{\ell + 3} : \text{أي}$$

$$\ell = 1 - \sqrt{3} : \text{أو } \ell^2 - 2\ell - 2 = 0 : \text{أي}$$

وبما أن $2 \leq U_n \leq 3$ لكل n من IN فإن $2 \leq \ell \leq 3$

وبالتالي فإن $\ell = 1 + \sqrt{3}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 1 + \sqrt{3} : \text{أي}$$