

1- تحديد الاعداد الحقيقية a و b و c

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1} = \frac{a(x^2-1) + b x (x+1) + c x (x-1)}{x(x-1)(x+1)} \quad \text{لدينا}$$

$$= \frac{(a+b+c)x^2 + (b-c)x - a}{x(x^2-1)}$$

إذن لكل x من $\mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$

$$\frac{1}{x(x^2-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1} \quad \text{لدينا}$$

أي لكل x من $\mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$

$$1 = (a+b+c)x^2 + (b-c)x - a$$

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ b-c=0 \\ a=-1 \end{cases} \quad \text{بمعنى أن}$$

$$b=c=\frac{1}{2} \quad \text{و} \quad a=-1$$

وبالتالي الاعداد الحقيقية المطلوبة هي :

$$c=\frac{1}{2} \quad \text{و} \quad b=\frac{1}{2} \quad \text{و} \quad a=-1$$

2- تحديد دالة أصلية للدالة f

ليكن x عنصرا من $]1, +\infty[$

$$f(x) = \frac{x}{(x^2-1)^2}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{(x^2-1)^2} \quad \text{أي}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{u'(x)}{u^2(x)}$$

حيث u هي الدالة المعرفة بمايلي :

$$\forall x \in]1, +\infty[\quad u(x) = x^2 - 1$$

$$f = \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u} \right)' \quad \text{ومنه}$$

إذن الدالة F المعرفة كما يأتي هي دالة أصلية للدالة f على $]1, +\infty[$

$$\forall x \in]1, +\infty[\quad F(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2-1}$$

3- حساب التكامل المطلوب

ليكن x عنصرا من $[2,3]$

$$\frac{x \ln x}{(x^2-1)^2} = f(x) \ln x \quad \text{لدينا}$$

$$= F'(x) \ln x$$

$$I = \int_2^3 F'(x) \ln x \, dx \quad \text{ومنه}$$

$$= [F(x) \ln x]_2^3 - \int_2^3 F(x) \frac{1}{x} \, dx$$

$$= F(3) \ln 3 - F(2) \ln 2 - \int_2^3 \frac{F(x)}{x} \, dx$$

ليكن x عنصرا من $[2,3]$

$$\frac{F(x)}{x} = -\frac{1}{2} \frac{1}{x(x^2-1)} \quad \text{لدينا}$$

وحسب السؤال الأول يكون لدينا

$$\frac{F(x)}{x} = -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1} \right) \quad \text{ومنه}$$

$$\int_2^3 \frac{F(x)}{x} \, dx = -\frac{1}{2} \left[\int_2^3 -\frac{1}{x} \, dx + \frac{1}{2} \int_2^3 \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{2} \int_2^3 \frac{dx}{x+1} \right]$$

$$= -\frac{1}{2} \left([-\ln x]_2^3 + \frac{1}{2} [\ln(x-1)]_2^3 + \frac{1}{2} [\ln(x+1)]_2^3 \right)$$

$$= -\frac{1}{2} \left(-\ln 3 + \ln 2 + \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \ln 4 - \frac{1}{2} \ln 3 \right)$$

$$= -\frac{1}{2} \left(-\frac{3}{2} \ln 3 + \frac{5}{2} \ln 2 \right)$$

$$= \frac{3}{4} \ln 3 - \frac{5}{4} \ln 2$$

$$F(3) \ln 3 = -\frac{1}{16} \ln 3 \quad \text{وبما أن}$$

$$F(2) \ln 2 = -\frac{1}{6} \ln 2 \quad \text{و}$$

$$I = -\frac{1}{16} \ln 3 + \frac{1}{6} \ln 2 - \frac{3}{4} \ln 3 + \frac{5}{4} \ln 2 \quad \text{فإن}$$

$$= \frac{-13}{16} \ln 3 + \frac{17}{12} \ln 2$$