

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3} \cdot \sqrt{1 + x^2}$$

$$D = \{ x \in \mathbb{R} \mid x^3 \neq 0, 1 + x^2 \geq 0 \} \quad * (1)$$
$$= \mathbb{R}^*$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^* ; -x \in \mathbb{R}^* \quad *$$

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 1}{(-x)^3} \cdot \sqrt{1 + (-x)^2}$$
$$= \frac{x^2 - 1}{-x^3} \cdot \sqrt{1 + x^2}$$
$$= -f(x)$$

إذن f دالة فردية.

(2) * لدينا :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* ; f(x) = \frac{(2x^2 - 1) \cdot x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x^3}$$
$$= \frac{x^3 \left(2 - \frac{1}{x^2} \right) \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x^3}$$
$$= \left(2 - \frac{1}{x^2} \right) \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2}$$

إذن المستقيم الذي معادلته $y = 2$ مقارب أفقي للمنحنى (ع)
بجوار $(+\infty)$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (2x^2 - 1) \sqrt{1+x^2} = -1 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^3 = 0 \\ x^3 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty}$$

إذن محور الأرتاب مقارب للمنحنى (ع).
* (3)

$\forall x \in D$;

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\left(4x \sqrt{1+x^2} + (2x^2 - 1) \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) x^3 - (2x^2 - 1) \sqrt{1+x^2} \cdot 3x^2}{x^6} \\ &= \frac{4x^2(1+x^2) + (2x^2 - 1)x^2 - 3(2x^2 - 1)(1+x^2)}{x^4 \cdot \sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{4x^2 + 4x^4 + 2x^4 - x^2 - 6x^2 + 3 - 6x^4 + 3x^2}{x^4 \cdot \sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

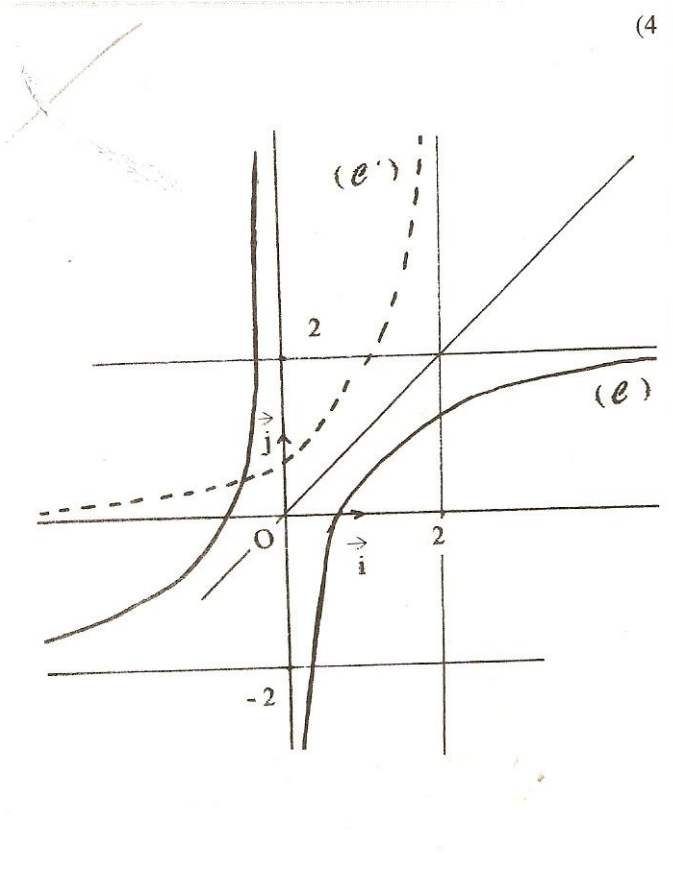
$$\boxed{f'(x) = \frac{3}{x^4 \cdot \sqrt{1+x^2}}}$$

إذن

* بما أن $x^4 \cdot \sqrt{1+x^2} > 0$ لكل x من D .

فإن $f'(x) > 0$ لكل x من D .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	-2 ↗ $+\infty$	↘ $-\infty$	↗ 2



$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ أو } x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(5) g قصور الدالة f على المجال $]0, +\infty[$.

أ. من خلال دراسة الدالة f، g دالة متصلة وتزايدية قطعاً على

$$g(]0, +\infty[) =]-\infty, 2[\text{ و }]0, +\infty[$$

إذن g تقابل من $]0, +\infty[$ نحو $]-\infty, 2[$.

ب. من خلال دراسة الدالة f، g دالة قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$

و $g'(x) \neq 0$ لكل x من $]0, +\infty[$.

إذن g^{-1} قابلة للاشتقاق على $]-\infty, 2[$.