

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{5u_n - 4}{u_n + 1}, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- (1) • لدينا $u_0 = 3$ إذن $u_0 > 2$
 • نفترض أن $u_p > 2$ ولنبين أن $u_{p+1} > 2$.
 لدينا :

$$\begin{aligned} u_{p+1} - 2 &= \frac{5u_p - 4}{u_p + 1} - 2 \\ &= \frac{3(u_p - 2)}{u_p + 1} \\ u_p > 2 &\Rightarrow \begin{cases} u_p - 2 > 0 \\ u_p + 1 > 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \frac{3(u_p - 2)}{u_p + 1} > 0 \\ &\Rightarrow u_{p+1} - 2 > 0 \\ &\Rightarrow u_{p+1} > 2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad u_n > 2} \quad \text{إذن}$$

(2) * لدينا

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{5u_n - 4}{u_n + 1} - u_n \\ &= \frac{-(u_n^2 - 4u_n + 4)}{u_n + 1} \\ &= \frac{-(u_n - 2)^2}{u_n + 1} \end{aligned}$$

$$u_n > 2 \Rightarrow \begin{cases} (u_n - 2)^2 > 0 \\ u_n + 1 > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow u_{n+1} - u_n < 0$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* ; u_{n+1} < u_n} \quad \text{إذن}$$

ومنه فإن المتتالية (u_n) تناقصية.

* بما أن المتتالية (u_n) تناقصية ومصفورة بالعدد 2 فإنها متقاربة. (3)

$$V_n = \frac{1}{u_n - 2} ; \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} V_{n+1} - V_n &= \frac{1}{u_{n+1} - 2} - \frac{1}{u_n - 2} \\ &= \frac{u_n + 1}{3(u_n - 2)} - \frac{1}{u_n - 2} \\ &= \frac{u_n + 1 - 3}{3(u_n - 2)} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} ; V_{n+1} - V_n = \frac{1}{3}} \quad \text{إذن}$$

ومنه فإن (V_n) متتالية حسابية أساسها $\frac{1}{3}$.

$$\text{ب. لدينا } V_0 = 1 \quad , \quad r = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} ; V_n = 1 + \frac{n}{3} = \frac{3+n}{3}} \quad \text{إذن}$$

$$v_n = \frac{1}{u_n - 2} \quad \text{وبما أن}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} ; u_n = 2 + \frac{1}{V_n} \quad \text{فإن :}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} ; u_n = 2 + \frac{3}{3+n}} \quad \text{أي}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{3+n} = 0 \Rightarrow \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2}$$