

f معرفة على $\mathbb{R}^*$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = -x + \frac{2}{x} & ; x \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[\\ f(x) = \frac{1+x}{2\sqrt{x}} & ; x \in [1, +\infty[\end{cases}$$

$$f(1) = \frac{1+1}{2} = 1 \quad \bullet \text{ لدينا}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1+x}{2\sqrt{x}} = \frac{1+1}{2 \cdot \sqrt{1}} = 1 = f(1) \quad \bullet$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(-x + \frac{2}{x} \right) = -1 + \frac{2}{1} = 1 = f(1) \quad \bullet$$

إذن f متصلة في النقطة $x_0 = 1$.

(2) أ -

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{-x + \frac{2}{x} - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{-x^2 - x + 2}{x(x-1)} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{(x-1)(-2-x)}{x(x-1)} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{-2-x}{x} = -3 \end{aligned}$$

إذن f قابلة للاشتقاق على اليسار عند النقطة $x_0 = 1$.

ب -

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{\frac{x+1}{2\sqrt{x}} - 1}{x - 1}$$

$$\forall x \in]1, +\infty[; f'(x) = \frac{x-1}{4x\sqrt{x}} \quad \text{إذن :}$$

ج - إشارة $f'(x)$ على $]1, +\infty[$:

$$x > 1 \Rightarrow x - 1 > 0 \quad , \quad 2x\sqrt{x} > 0$$

$$\Rightarrow f'(x) > 0$$

النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)}{2\sqrt{x}} \quad *$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x + \frac{2}{x} \right) = +\infty \quad *$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(-x + \frac{2}{x} \right) = +\infty \quad *$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left(-x + \frac{2}{x} \right) = -\infty \quad *$$

جدول تغيرات f :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	—	—	$-3 \mid 0$	+
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$+\infty$ ↘	1	↗ $+\infty$

(4) أ - *

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} = 0$$

إذن المستقيم الذي معادلته $y = -x$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathcal{C})$ بجوار $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x \cdot 2\sqrt{x}} \quad *$$

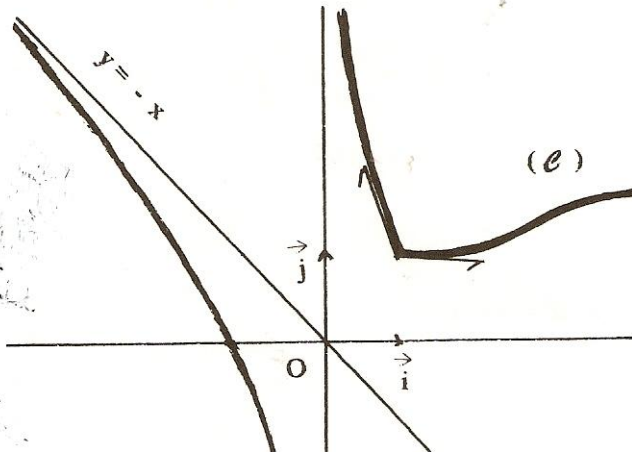
$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{2\sqrt{x}} = 0$$

إذن المنحنى (e) يقبل فرعاً شلجيمياً اتجاهه هو اتجاه محور الأفاسيل..
 * بما أن $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ فإن محور الأرتيب مقارب عمودي

للمنحنى (e).

$$\begin{aligned} \begin{cases} f(x) = 0 \\ x < 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -x + \frac{2}{x} = 0 \\ x < 0 \end{cases} \quad \text{ب-} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x^2 = 0 \\ x < 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{2} - x)(\sqrt{2} + x) = 0 \\ x < 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \end{aligned}$$

إذن المنحنى (e) يقطع محور الأفاسيل في النقطة A $(-\sqrt{2}, 0)$.



$$\begin{aligned}
 &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{x + 1 - 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(x-1)} \\
 &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \\
 &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

إذن f قابلة للاشتقاق على اليمين عند النقطة $x_0 = 1$.

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \forall x \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[; f'(x) &= \left(-x + \frac{2}{x}\right)' \\
 &= -1 - \frac{2}{x^2}
 \end{aligned}$$

بما أن $-\frac{2}{x^2} < 0$ لكل x من $]-\infty, 0[\cup]0, 1[$.

فإن $-1 - \frac{2}{x^2} < 0$ لكل x من $]-\infty, 0[\cup]0, 1[$.

وبالتالي فإن : $\forall x \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[; f'(x) < 0$

$$\forall x \in]1, +\infty[; f'(x) = \left(\frac{1+x}{2\sqrt{x}}\right)' \quad \text{ب.}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1 \cdot (2\sqrt{x}) - (1+x) \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}}{(2\sqrt{x})^2} \\
 &= \frac{2x - 1 - x}{4x} \\
 &= \frac{\sqrt{x}}{4x}
 \end{aligned}$$