

1- مجموعة تعريف الدالة f :

. لكل عدد سالب صورة بالدالة f لأن مجموعة تعريف الدالة

$x \rightarrow e^{2x} - 4x - 1$ هي $\mathbb{R}$.

. إذا كان $x \geq 0$ فإن $e^x \geq 1$ أي $e^x - 1 \geq 0$

ومنه إذا كان $x \geq 0$ فإن x ينتمي إلى مجموعة تعريف الدالة f

إذن $\mathbb{R}^- \cup \mathbb{R}^+$ جزء من مجموعة تعريف الدالة f .

وبما أن مجموعة تعريف f جزء من $\mathbb{R}$ فإن مجموعة تعريف

الدالة f هي $\mathbb{R}$.

اتصال f في 0

لدينا $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (e^{2x} - 4x - 1)$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (e^{2x} - 4x - 1)$$

$$= 0$$

$$= f(0)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{e^x - 1}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{e^x - 1}$$

$$= 0$$

$$= f(0)$$

إذن f متصلة في 0

2- اشتقاق f في 0 :

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$.

. لدينا $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 4x - 1}{x}$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{e^{2x} - 4x - 1}{x}$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left[2x \frac{e^{2x} - 1}{2x} - \frac{4x}{x} \right]$$

$$= -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \text{علما أن}$$

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق على اليسار في 0 ولدينا $f'_g(0) = -2$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\sqrt{e^x - 1}}{x} \quad \text{لدينا .}$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \sqrt{\frac{e^x - 1}{x} \times \frac{1}{x}}$$

$$= +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \text{لأن}$$

إذن f غير قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 .
التأويل الهندسي للنتيجة

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \leq 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -2 \quad \text{لدينا .}$$

إذن لمنحنى الدالة f نصف مماس على يسار 0 معادلة حامله هي $y = -2x$.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty \quad \text{لدينا :}$$

إذن لمنحنى الدالة f نصف مماس على يمين 0 حامله هو محور الأرتيب .

3- الفروع اللانهائية :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad \text{لدينا .}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + 4x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0 \quad \text{وبما أن}$$

فإن لمنحنى الدالة f يقبل مستقيما مقاربا معادلته $y = -4x - 1$ عند $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - 1 = +\infty \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{لدينا .}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{e^x - 1}}{x} \quad \text{ولدينا}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{x^2}}$$

$$= +\infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \ln \frac{e^x}{x^2}}{x^2} \quad \text{وأن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \quad \text{لأن} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\ln e^x - \ln x^2}}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \left(1 - 2 \frac{\ln x}{x}\right)} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

إذن منحنى الدالة f يقبل فرعاً شلجياً اتجاهه محور الأرتيب.

4- منحنى تغيرات f :

. الدالة f قابلة للاشتقاق على $]-\infty, 0[$

ليكن x عنصراً من $]-\infty, 0[$

$$f'(x) = 2e^{2x} - 4 \quad \text{لدينا}$$

$$= 2(e^{2x} - 2)$$

بما أن $x < 0$ أي $2x < 0$ فإن $e^{2x} < 1$ ومنه $e^{2x} - 2 < 0$

بمعنى أن $f'(x) < 0$

إذن f تناقصية قطعاً على $]-\infty, 0[$

. الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$

ليكن x عنصراً من $]0, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x - 1}} \quad \text{لدينا}$$

وبما أن $e^x > 0$ فإن $f'(x) > 0$

إذن f تزايدية قطعاً على $]0, +\infty[$

5- تحديد نقطة الانعطاف :

. ليكن x عنصراً من $\mathbb{R}^-$

$$f''(x) = 4e^{2x} \quad \text{لدينا} \quad f'(x) = 2e^{2x} - 4 \quad \text{ومنه}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^- \quad f''(x) > 0 \quad \text{إذن}$$

. ليكن x عنصراً من $\mathbb{R}^{*+}$

$$f'(x) = \frac{e^x}{2} (e^x - 1)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{لدينا}$$

$$f''(x) = \frac{1}{2} \left(e^x (e^x - 1)^{-\frac{1}{2}} + e^x \left(-\frac{1}{2} e^x \right) (e^x - 1)^{-\frac{3}{2}} \right) \quad \text{ومنه}$$

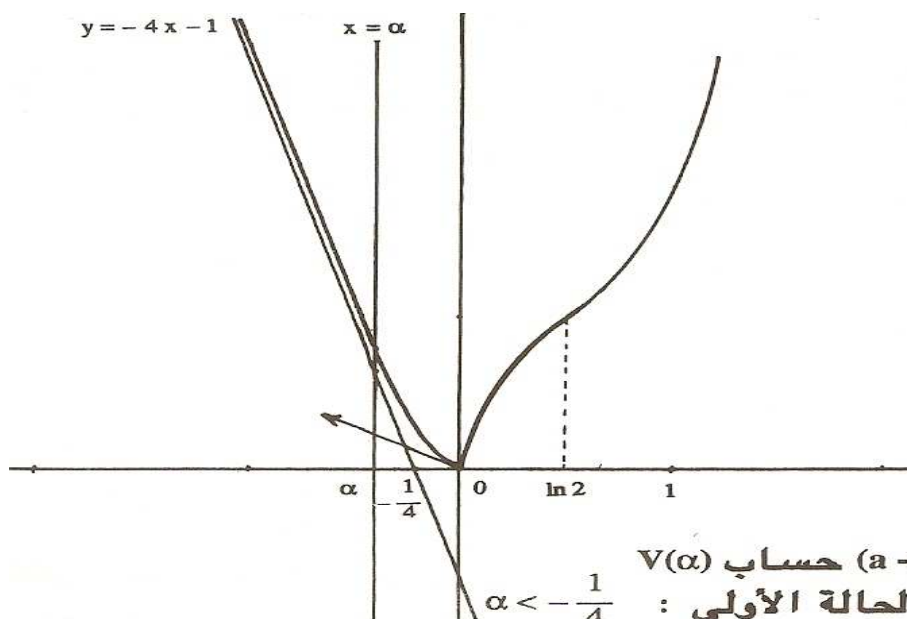
$$= \frac{1}{2} e^x (e^x - 1)^{-\frac{3}{2}} \left((e^x - 1) - \frac{1}{2} e^x \right)$$

$$= \frac{1}{2} e^x (e^x - 1)^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{e^x - 2}{2} \right)$$

إذن $f''(x)$ تنعدم فقط في $\ln 2$ وتغير إشارتها في

المجال $]0, +\infty[$ وبالتالي $A(\ln 2, 1)$ هي نقطة انعطاف .

رسم المنحنى (C) :

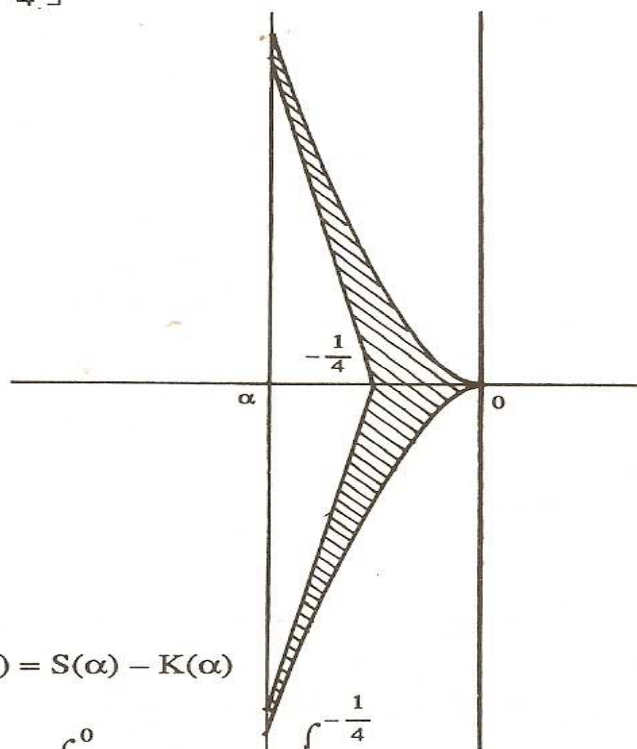


(a-6) حساب $V(\alpha)$

الحالة الأولى : $\alpha < -\frac{1}{4}$

ليكن $S(\alpha)$ حجم الجسم المولد بالدوران حول محور الأفاصيل لمنحنى قصور الدالة f على $[\alpha, 0]$.

$K(\alpha)$ حجم الجسم المولد بالدوران حول محور الأفاصيل لمنحنى قصور الدالة $-4x - 1$ على $[\alpha, -\frac{1}{4}]$



$$V(\alpha) = S(\alpha) - K(\alpha)$$

لدينا

$$= \int_{\alpha}^0 \pi f^2(x) dx - \int_{\alpha}^{-\frac{1}{4}} \pi (-4x - 1)^2 dx$$

$$\int_{\alpha}^0 f^2(x) dx = \int_{\alpha}^0 (e^{2x} - 4x - 1)^2 dx \quad \text{لدينا}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\alpha}^0 e^{4x} dx - 2 \int_{\alpha}^0 (4x+1) e^{2x} dx + \int_{\alpha}^0 (4x+1)^2 dx \\
 &= \left[\frac{1}{4} e^{4x} \right]_{\alpha}^0 + \left[\frac{1}{12} (4x+1)^3 \right]_{\alpha}^0 - 2 \int_{\alpha}^0 (4x+1) e^{2x} dx \\
 &= \frac{1}{4} (-e^{4\alpha} + 1) + \frac{1}{12} (-(4\alpha+1)^3 + 1) - 2 \int_{\alpha}^0 (4x+1) e^{2x} dx
 \end{aligned}$$

لدينا

$$\begin{aligned}
 \int_{\alpha}^0 (4x+1) e^{2x} dx &= \left[\frac{1}{2} e^{2x} (4x+1) \right]_{\alpha}^0 - \int_{\alpha}^0 \frac{e^{2x}}{2} \cdot 4 dx \\
 &= -\frac{1}{2} e^{2\alpha} (4\alpha+1) + \frac{1}{2} - \int_{\alpha}^0 2 e^{2x} dx \\
 &= -\frac{1}{2} e^{2\alpha} (4\alpha+1) + \frac{1}{2} - 2 \left[\frac{1}{2} e^{2x} \right]_{\alpha}^0 \\
 &= -\frac{1}{2} e^{2\alpha} (4\alpha+1) + \frac{1}{2} - 2 \left(-\frac{1}{2} e^{2\alpha} + \frac{1}{2} \right) \\
 &= e^{2\alpha} \left(-\frac{1}{2} (4\alpha+1) + 1 \right) - \frac{1}{2} \\
 &= \frac{1}{2} e^{2\alpha} (-4\alpha+1) - \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

ومنه

$$\begin{aligned}
 \int_{\alpha}^0 f^2(x) dx &= \frac{1}{4} (-e^{4\alpha} + 1) + \frac{1}{12} (-(4\alpha+1)^3 + 1) - e^{2\alpha} (-4\alpha+1) + 1 \\
 \int_{\alpha}^{-\frac{1}{4}} (-4x-1)^2 dx &= \int_{\alpha}^{-\frac{1}{4}} (4x+1)^2 dx
 \end{aligned}$$

لدينا

$$\begin{aligned}
 &= \left[\frac{1}{12} (4x+1)^3 \right]_{\alpha}^{-\frac{1}{4}} \\
 &= -\frac{1}{12} (4\alpha+1)^3
 \end{aligned}$$

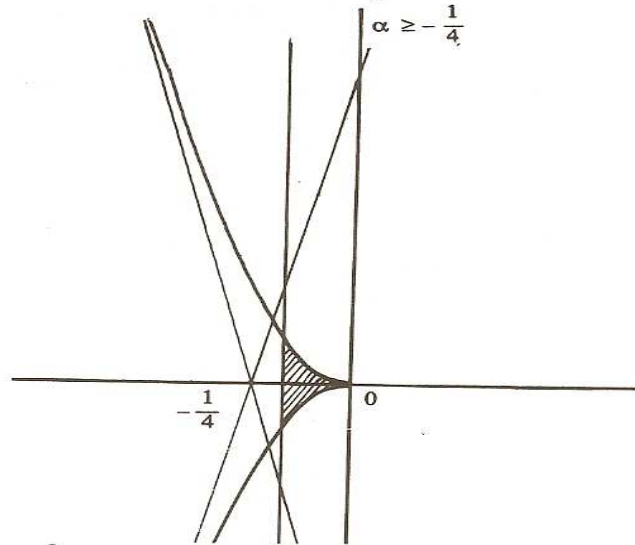
إذن

$$\begin{aligned}
 V(\alpha) &= \frac{\pi}{4} (-e^{4\alpha} + 1) - \frac{\pi}{12} (4\alpha+1)^3 + \frac{\pi}{12} - \pi e^{2\alpha} (-4\alpha+1) \\
 &\quad + \pi + \frac{\pi}{12} (4\alpha+1)^3 \\
 &= \frac{\pi}{4} (1 - e^{4\alpha}) + \pi e^{2\alpha} (4\alpha-1) + \frac{13\pi}{12}
 \end{aligned}$$

بوحة cm³ لدينا

$$V(\alpha) = 2\pi(1 - e^{4\alpha}) + 8\pi e^{2\alpha}(4\alpha - 1) + \frac{26\pi}{3}$$

الحالة الثانية : $\alpha \geq -\frac{1}{4}$



$$V(\alpha) = \int_{-\frac{1}{4}}^{\alpha} \pi f^2(x) dx$$

لدينا

$$= \pi \left[\frac{1}{4} e^{4x} + \frac{1}{12} (4x+1)^3 - e^{2x}(4x+1) - 2e^{2x} \right]_{-\frac{1}{4}}^{\alpha}$$

$$= \pi \left[\frac{1}{4} e^{4\alpha} + \frac{1}{12} (4\alpha+1)^3 - e^{2\alpha}(4\alpha+1) + 2e^{2\alpha} - \frac{1}{4} e^{-1} - 2e^{-\frac{1}{2}} \right]$$

بالوحدة cm³ لدينا

$$V(\alpha) = \pi \left[2e^{4\alpha} + \frac{2}{3} (4\alpha+1)^3 - 8e^{2\alpha}(4\alpha+1) + 16e^{2\alpha} - \frac{2}{e} - 16\frac{\sqrt{e}}{e} \right]$$

(b) حساب النهاية المطلوبة

$$V(\alpha) = \frac{\pi}{4} (1 - e^{4\alpha}) + \pi e^{2\alpha} (4\alpha - 1) + \frac{13\pi}{12}$$

لدينا

لكل α ينتمي إلى $]-\infty, -\frac{1}{4}[$

$$\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} e^{4\alpha} = 0$$

لدينا

$$\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} (4\alpha - 1) e^{2\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} 2 \cdot (2\alpha e^{2\alpha}) - e^{2\alpha} = 0$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} 2\alpha e^{2\alpha} = 0$$

لأن

$$\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} V(\alpha) = \frac{\pi}{4} + \frac{13\pi}{12}$$

ومنه

$$= \frac{4\pi}{3}$$



بالتوفيق للجميع

مع تحيات Equipe Achamel

Achamel