

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = -2 + \sqrt{5 + (u_n + 2)^2} ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- - a (1) لدينا $u_0 = 1$ إذن $u_0 \geq 1$.
- نفترض أن $u_p \geq 1$ ولنبين أن $u_{p+1} \geq 1$.

$$\begin{aligned} u_p \geq 1 &\Rightarrow (u_p + 2)^2 \geq 9 \\ &\Rightarrow 5 + (u_p + 2)^2 \geq 9 \\ &\Rightarrow \sqrt{5 + (u_p + 2)^2} \geq 3 \\ &\Rightarrow -2 + \sqrt{5 + (u_p + 2)^2} \geq -2 + 3 \\ &\Rightarrow u_{p+1} \geq 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} ; u_n \geq 1} \quad \text{إذن}$$

b - لنبين أن (u_n) تزايدية.

• الطريقة الأولى :

$$\begin{aligned} u_{n+1} + 2 &= \sqrt{5 + (u_n + 2)^2} \\ \forall n \in \mathbb{N} ; 5 + (u_n + 2)^2 &\geq (u_n + 2)^2 \\ \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; \sqrt{5 + (u_n + 2)^2} &\geq |u_n + 2| \\ \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} + 2 &\geq u_n + 2 \quad (u_n \geq 1 \text{ لأن}) \\ \Rightarrow \boxed{\forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} &\geq u_n} \end{aligned}$$

إذن المتتالية (u_n) تزايدية.

• الطريقة الثانية :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sqrt{5 + (u_n + 2)^2} - (2 + u_n) \\ &= \frac{5 + (u_n + 2)^2 - (2 + u_n)^2}{\sqrt{5 + (u_n + 2)^2} + 2 + u_n} \\ &= \frac{5}{\sqrt{5 + (u_n + 2)^2} + 2 + u_n} \geq 0 \end{aligned}$$

$$V_n = (2 + u_n)^2, \quad n \in \mathbb{N} \quad (2)$$

$$V_{n+1} = (2 + u_{n+1})^2 \quad - a$$

$$\begin{aligned} &= (\sqrt{5 + (u_n + 2)^2})^2 \\ &= 5 + (u_n + 2)^2 \\ &= 5 + V_n \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} ; V_{n+1} = V_n + 5} \quad \text{إذن}$$

ومنه فإن (V_n) متتالية حسابية أساسها 5.

b - بما أن (V_n) متتالية حسابية أساسها 5 وحدها الأول $V_0 = 9$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} ; V_n = 9 + 5n} \quad \text{فإن}$$

$$\begin{cases} V_n = (2 + u_n)^2 \\ u_n \geq 1 \end{cases} \Rightarrow 2 + u_n = \sqrt{V_n} \quad * - c$$

$$\Rightarrow u_n = -2 + \sqrt{V_n}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} ; u_n = -2 + \sqrt{9 + 5n}} \quad \text{إذن}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (9 + 5n) = +\infty \Rightarrow \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty} \quad *$$