

$$f(x) = \frac{1}{x^2} - 2 \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} ; x \in \mathbb{R}^*$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^* ; -x \in \mathbb{R}^* \quad (1)$$

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{1}{(-x)^2} - 2 \sqrt{1 + \frac{1}{(-x)^2}} \\ &= \frac{1}{x^2} - 2 \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

إذن f دالة زوجية.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2} \quad * \text{ أ. (2)}$$

* بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$ فإن المستقيم الذي معادلته $y = -2$

مقارب أفقي للمنحنى (C) بجوار $+\infty$.

ب. لدينا :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^* ; f(x) &= \frac{1}{x^2} \left(1 - 2x^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right) \\ &= \frac{1}{x^2} \left(1 - 2 \sqrt{x^4 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)} \right) \\ &= \frac{1}{x^2} (1 - 2 \sqrt{x^4 + x^2}) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^4 + x^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} (1 - 2 \sqrt{x^4 + x^2}) = +\infty$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty}$$

إذن محور الأرتاب مقارب عمودي للمنحنى (C).

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^* ; f'(x) &= \frac{-2}{x^3} - 2 \cdot \frac{\left(-\frac{2}{x^3} \right)}{2 \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \\ &= \frac{-2}{x^3} + \frac{2}{x^3 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{2}{x^3} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} - 1 \right)}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* ; 1 + \frac{1}{x^2} > 1 \quad \text{و} \quad x^3 > 0$$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} < 1 \quad \text{و} \quad \frac{2}{x^3} > 0$$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \frac{2}{x^3} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} - 1 \right) < 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\forall x \in]0, +\infty[; f'(x) < 0}$$

إذن f تناقصية قطعاً على $]0, +\infty[$.

(4) * بما أن f دالة متصلة وتناقصية قطعاً على $]0, +\infty[$ و $f(]0, +\infty[) =]-2, +\infty[$ و $0 \in]-2, +\infty[$. فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً a في المجال $]0, +\infty[$.

$$* \text{ لدينا } f\left(\frac{1}{2}\right) = 4 - 2\sqrt{5} < 0 \quad \text{و} \quad f\left(\frac{1}{4}\right) = 16 - 2\sqrt{17} > 0$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) < 0 \quad \text{إذن}$$

$$\frac{1}{4} < a < \frac{1}{2} \quad \text{ومنه فإن}$$

الخلاصة :

المنحنى (C) يقطع محور الأفاصيل في نقطة وحيدة أفصولها a يحقق

$$\frac{1}{4} < a < \frac{1}{2}$$

ب -

