

1- اتصال f على اليمين في 0.

لدينا

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \cdot \frac{x}{2} \ln\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$= 0$$

لأن

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x}{2} \ln\left(\frac{x}{2}\right) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} X \ln X = 0$$

ومنه

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = f(0)$$

إذن f متصلة على اليمين في 0.

2- قابلية اشتقاق f على اليمين في 0.

لدينا

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x}{2} \ln\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$= 0$$

إذن f قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 و $f'_d(0) = 0$

3- أ - حساب $f'(x)$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$

ليكن x عنصرا من $]0, +\infty[$

$$f(x) = \frac{x^2}{2} (\ln x - \ln 2) \quad \text{لدينا}$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{\ln 2}{2} \cdot x^2$$

$$f'(x) = x \ln x + \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} - x \ln 2 \quad \text{ومنه}$$

$$= x (\ln x - \ln 2) + \frac{x}{2}$$

$$= \frac{1}{2} x \left(2 \ln \left(\frac{x}{2} \right) + 1 \right)$$

$$= \frac{1}{2} x \left(\ln \left(\frac{x}{2} \right)^2 + 1 \right)$$

إشارة $f'(x)$

ليكن x عنصرا من $]0, +\infty[$

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $\ln \left(\frac{x}{2} \right)^2 + 1$

$$\ln \left(\frac{x}{2} \right)^2 + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln \left(\frac{x}{2} \right)^2 > -1 \quad \text{لدينا}$$

$$\Leftrightarrow \ln \left(\frac{x}{2} \right)^2 > \ln \frac{1}{e}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{2} \right)^2 > \frac{1}{e}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2} > \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{2\sqrt{e}}{e}$$

إذا كان $x > \frac{2\sqrt{e}}{e}$ فإن $f'(x) > 0$

وإذا كان $0 < x < \frac{2\sqrt{e}}{e}$ فإن $f'(x) < 0$

ب - حساب النهاية المطلوبة

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x}{2} = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2} = +\infty \quad \text{لدينا}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{ومنه}$$

جدول تغيرات f

x	0	$\frac{2\sqrt{e}}{e}$	$+\infty$
$f'(x)$	0	-	0
$f(x)$	0	$-\frac{1}{e}$	$+\infty$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2\sqrt{e}}{e}\right) &= f\left(\frac{2}{\sqrt{e}}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{e} \ln \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{e}} \\ &= -\frac{1}{e} \end{aligned}$$

4- الفرع الشلجي للمنحنى (C).

لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} \ln\left(\frac{x}{2}\right) = +\infty$$

إذن (C) يقبل فرعاً شلجياً اتجاهه محور الارايب

5- حساب $f''(x)$

الدالة f' قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$

ليكن x عنصراً من $]0, +\infty[$

لدينا $f'(x) = x \ln x + \frac{x}{2} - x \ln 2$

ومنه $f''(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{2} - \ln 2$

$$= \ln x + \frac{3}{2} - \ln 2$$

$$= \ln\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{3}{2}$$

• تقعر المنحنى (C)

ليكن x عنصراً من $]0, +\infty[$

لدينا $f''(x) > 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{2}\right) > -\frac{3}{2}$

$$\Leftrightarrow \ln \frac{x}{2} > \ln e^{-\frac{3}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2} > e^{-\frac{3}{2}}$$

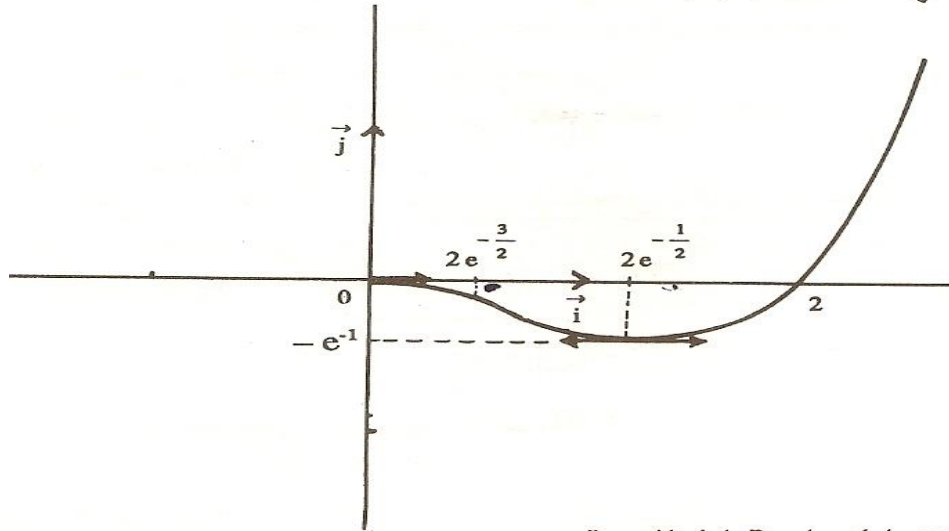
$$\Leftrightarrow x > 2e^{-\frac{3}{2}}$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x < 2e^{-\frac{3}{2}}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2e^{-\frac{3}{2}}$$

x	0	$2e^{-\frac{3}{2}}$	$+\infty$
$f''(x)$		0	+
تقعر (C)	تقعر (C) موجه نحو الاراتيب السالبة		تقعر (C) موجه نحو الاراتيب الموجبة

- النقطة Ω التي افصولها $2e^{-\frac{3}{2}}$ وارتوبها $-3e^{-3}$ هي نقطة انعطاف المنحنى (C).
- 6- أ- معادلة مماس (C) عند A .
 لدينا $f(2) = 0$ و $f'(2) = 1$
 ومنه $y = x - 2$ هي معادلة مماس (C) عند النقطة $A(2,0)$.
- ب- انشاء (C)



7- المساحة المطلوبة

مساحة السطح المحصور بين المنحنى (C) ومحور الافاصيل والمستقيمين المحددين بالمعادلتين $x = 1$ و $x = 2$ هي :

$$\begin{aligned}
 A &= \int_1^2 -f(x) dx \\
 &= -\frac{1}{2} \int_1^2 x^2 \ln\left(\frac{x}{2}\right) dx \\
 &= -\frac{1}{2} \left(\left[\frac{x^3}{3} \ln\left(\frac{x}{2}\right) \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^3}{3} \frac{1}{x} dx \right) \\
 &= -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3} \ln \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \int_1^2 x^2 dx \right) \\
 &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \ln 2 - \frac{1}{3} \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_1^2 \right) \\
 &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \ln 2 - \frac{7}{9} \right) \\
 &= \frac{7}{18} - \frac{1}{6} \ln 2
 \end{aligned}$$

Achamel