

$$P(z) = z^3 + (1 - 2i)z^2 + 2(1 - i)z - 4i$$

(1) نفترض أن المعادلة $P(z) = 0$ تقبل حلاً تخيلياً صرفاً z_0 .

نضع $z_0 = xi$ حيث $x \in \mathbb{R}$.

$$P(z_0) = 0 \Leftrightarrow (xi)^3 + (1 - 2i)(xi)^2 + 2(1 - i)xi - 4i = 0$$

$$\Leftrightarrow -x^3i - (1 - 2i)x^2 + 2(1 - i)xi - 4i = 0$$

$$\Leftrightarrow -x^3i - x^2 + 2ix^2 + 2xi + 2x - 4i = 0$$

$$\Leftrightarrow (-x^2 + 2x) + (-x^3 + 2x^2 + 2x - 4)i = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 2x = 0 \\ -x^3 + 2x^2 + 2x - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = 2}$$

$$\boxed{z_0 = 2i} \quad \text{إذن}$$

لنحدد a و b حيث $\forall z \in \mathbb{C}; P(z) = (z - 2i)(z^2 + az + b)$

$$(z - 2i)(z^2 + az + b) = z^3 + az^2 + bz - 2iz^2 - 2aiz - 2bi$$

$$= z^3 + (a - 2i)z^2 + (b - 2ai)z - 2bi$$

$$P(z) = (z - 2i)(z^2 + az + b) \Leftrightarrow \begin{cases} a - 2i = 1 - 2i \\ b - 2ai = 2 - 2i \\ -2bi = -4i \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a = 1 \quad \text{و} \quad b = 2$$

$$\boxed{P(z) = (z - 2i)(z^2 + z + 2)} \quad \text{إذن}$$

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z - 2i)(z^2 + z + 2) = 0 \quad (3) \text{ لدينا:}$$

$$\Leftrightarrow z - 2i = 0 \quad \text{أو} \quad z^2 + z + 2 = 0$$

$$z^2 + z + 2 = 0 \quad \text{لنحل المعادلة}$$

$$\Delta = -7 = (i\sqrt{7})^2$$

$$z_2 = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2} \quad \text{و} \quad z_1 = \frac{-1 - i\sqrt{7}}{2}$$

إذن مجموعة حلول المعادلة $P(z) = 0$ هي:

$$\left\{ 2i, \frac{-1 - i\sqrt{7}}{2}, \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2} \right\}$$

إعداد الأستاذ : سعيد الهاني