

1- أ- تحديد حيز تعريف الدالة f

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 + 1 > 0 \quad \text{لدينا}$$

ومنه حيز تعريف f هو $\mathbb{R}$.

الدالة f زوجية

. لدينا حيز تعريفها مماثل بالنسبة للصفر

. ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$

$$\text{لدينا} \quad x^2 + 1 = (-x)^2 + 1$$

$$\text{ومنه} \quad \ln(x^2 + 1) = \ln((-x)^2 + 1)$$

$$\text{إذن} \quad f(x) = f(-x)$$

وبالتالي f زوجية .

ب- تغيرات الدالة f

. الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$

$$\text{لدينا} \quad f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

ومنه إذا كان $x > 0$ فإن $f'(x) > 0$

إذن f تزايدية قطعاً على $[0, +\infty[$

وبما أن f زوجية فإنها تناقصية قطعاً على $] -\infty, 0]$.

$$\text{لدينا} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1) = +\infty$$

$$\text{ومنه} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\text{وبما أن f زوجية فإن} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'(x)	-	0	+
f(x)	$+\infty$	0	$+\infty$

2- أ- نقطتا انعطاف (C)

الدالة f' قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} \quad \text{لدينا}$$

$$f''(x) = 2 \cdot \frac{(x^2 + 1) - (2x) \cdot x}{(x^2 + 1)^2} \quad \text{ومنه}$$

$$= 2 \cdot \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

إذن $f''(x)$ تنعدم في 1 وتغير إشارتها في المجال المفتوح $]0, 2[$ الذي مركزه 1 وتنعدم في -1 وتغير إشارتها في المجال المفتوح $]-2, 0[$ الذي مركزه -1.

ومنه (C) يقبل نقطتي انعطاف $A(1, \ln 2)$ و $B(-1, \ln 2)$

ب- الفروع اللانهائية

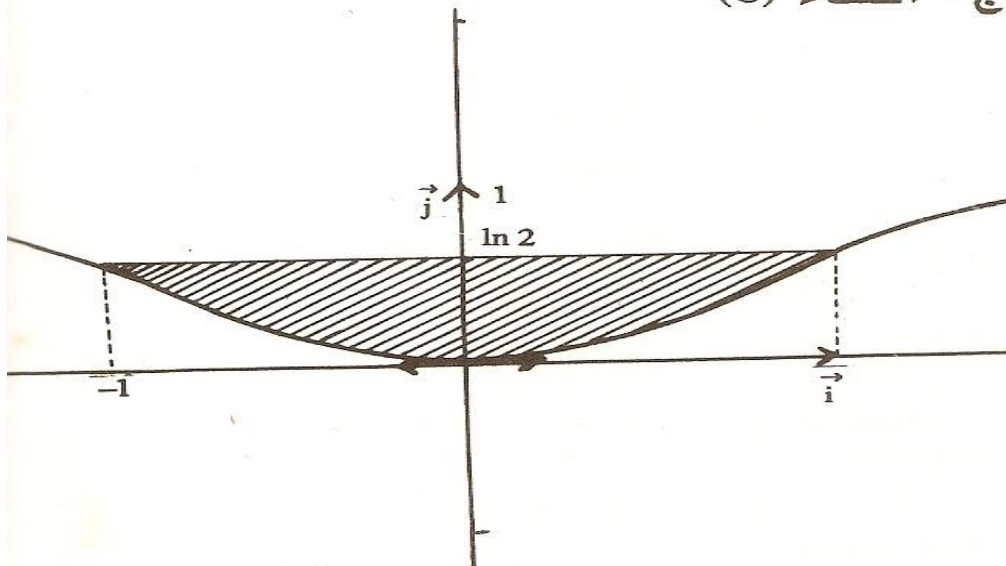
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{لدينا}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

ومنه (C) يقبل فرعا شلجيميا اتجاهه محور الافاصيل بجوار $+\infty$

وبما أن f زوجية فإن (C) يقبل فرعا شلجيميا اتجاهه محور الافاصيل بجوار $-\infty$.

ج- انشاء (C)



3- حساب المساحة المطلوبة

مساحة الحيز المقترحة هي :

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^1 (\ln 2 - f(x)) dx \\ &= \int_{-1}^1 \ln 2 dx - \int_{-1}^1 \ln(x^2 + 1) dx \\ &= [x \ln 2]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \ln(x^2 + 1) dx \\ &= 2 \ln 2 - \int_{-1}^1 \ln(x^2 + 1) dx \\ \int_{-1}^1 \ln(x^2 + 1) dx &= \int_{-1}^1 1 \cdot \ln(x^2 + 1) dx && \text{لدينا} \\ &= [x \ln(x^2 + 1)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 x \cdot \frac{2x}{x^2 + 1} dx \\ &= 2 \ln 2 - 2 \int_{-1}^1 \frac{x^2}{x^2 + 1} dx \\ \int_{-1}^1 \frac{x^2}{x^2 + 1} dx &= \int_{-1}^1 \left(1 - \frac{1}{x^2 + 1} \right) dx && \text{لدينا} \\ &= [x]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx \\ &= 2 - [\text{Arctan } x]_{-1}^1 \\ &= 2 - \frac{\pi}{2} \\ \int_{-1}^1 \ln(x^2 + 1) dx &= 2 \ln 2 - 2 \left(2 - \frac{\pi}{2} \right) && \text{ومنه} \\ &= 2 \ln 2 - 4 + \pi \\ A &= 4 - \pi && \text{إذن} \end{aligned}$$

Achamel