

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{3} \\ u_{n+1} = \frac{n+3+2nu_n}{3n+3}; n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

(1) أ. • لدينا $u_1 = \frac{1}{3}$ إذن $u_1 - 1 < 0$

• نفترض أن $u_p - 1 < 0$ لنبين أن $u_{p+1} - 1 < 0$

$$\begin{aligned} u_{p+1} - 1 &= \frac{p+3+2pu_p}{3p+3} - 1 && \text{لدينا} \\ &= \frac{p+3+2pu_p-3p-3}{3p+3} \end{aligned}$$

$$= \frac{2p(u_p - 1)}{3p+3}$$

بما أن $u_p - 1 < 0$ و $p > 0$

$$\frac{2p(u_p - 1)}{3p+3} < 0 \quad \text{فإن}$$

ومنه فإن $u_{p+1} - 1 < 0$

إذن $\forall n \in \mathbb{N}^* ; u_n - 1 < 0$

ب. • لدينا $u_{n+1} - u_n = \frac{n+3+2nu_n}{3n+3}$

$$= \frac{n+3+2nu_n-3nu_n-3u_n}{3n+3}$$

$$= \frac{(n+3)(1-u_n)}{3n+3}$$

بما أن $u_n - 1 < 0$ و $n > 0$

$$\frac{(n+3)(1-u_n)}{3n+3} > 0 \quad \text{فإن}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* ; u_{n+1} > u_n} \quad \text{وبالتالي فإن}$$

إذن المتتالية $(u_n)_{n>0}$ تزايدية.

ج - بما أن المتتالية تزايدية ومكبورة بالعدد 1 (لأن $u_n - 1 < 0$) فإنها متقاربة.

$$V_n = n(1-u_n) \quad ; \quad n \in \mathbb{N}^* \quad (2)$$

أ -

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= (n+1)(1-u_n) \\ &= (n+1) \left(1 - \frac{n+3+2nu_n}{3n+3} \right) \\ &= (n+1) \left(\frac{3n+3-n-3-2nu_n}{3n+3} \right) \\ &= \frac{(n+1)(2n-2nu_n)}{3(n+1)} \\ &= \frac{2}{3} n(1-u_n) \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* ; V_{n+1} = \frac{2}{3} V_n$$

إذن

ومنه فإن $(V_n)_{n>0}$ متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ وحدها الأول $V_1 = \frac{2}{3}$.

ب. • لدينا

$$\forall n \in \mathbb{N}^* ; V_n = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$V_n = n(1 - u_n) \Rightarrow 1 - u_n = \frac{1}{n} V_n$$

$$\Rightarrow u_n = 1 - \frac{1}{n} V_n$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* ; u_n = 1 - \frac{1}{n} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

إذن

ج. -

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$