

## 1- دالة فردية

. لدينا  $\mathbb{R}$  هي مجموعة تعريف الدالة  $f$  وهي متماثلة بالنسبة للصفر .

. ليكن  $x$  عنصرا من  $\mathbb{R}$

إذا كان  $x = 0$  فإن  $f(-x) = -f(x)$  لأن  $f(0) = 0$

إذا كان  $x \neq 0$  فإن  $-x \neq 0$

$$f(x) = x(2 + \ln^2|x|) \quad \text{ومنه}$$

$$f(-x) = -x(2 + \ln^2|-x|)$$

$$= -x(2 + \ln^2|x|)$$

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{إذن}$$

وبالتالي  $f$  دالة فردية .

## 2- حساب النهاية المطلوبة

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 + \ln^2 |x|) = +\infty \quad \text{لدينا}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{ومنه}$$

## 3- أ- اثبات المتساوية المقترحة

ليكن  $x$  عنصرا من  $]0, +\infty[$  نضع  $t^2 = x$  ،  $t > 0$

$$x \ln^2 x = t^2 \ln^2 t^2 \quad \text{لدينا}$$

$$= t^2 (2 \ln t)^2$$

$$= 4 (t \ln t)^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln^2 x = \lim_{t \rightarrow 0} 4 (t \ln t)^2 \quad \text{ومنه}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} t \ln t = 0 \quad \text{لأن}$$

$$= 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} t \ln t = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} t \ln t = 0$$

## الاستنتاج

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln^2 |x| = 0 \quad \text{لدينا}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} 2 + x \ln^2 |x| = 2 \quad \text{ومنه}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \quad \text{إذن}$$

$$= f(0)$$

أي أن  $f$  متصلة في  $x_0 = 0$

## ب- دراسة قابلية اشتقاق $f$ في 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + \ln^2 |x|}{x}$$

$$= +\infty$$

إذن  $f$  غير قابلة للاشتقاق في 0

## 4- أ- دراسة تغيرات $f$

بما أن  $f$  فردية فإنه يكفي دراسة  $f$  في  $]0, +\infty[$

الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $]0, +\infty[$

ليكن  $x$  عنصرا من  $]0, +\infty[$

$$f(x) = x(2 + \ln^2 x) \quad \text{لدينا}$$

$$= 2x + x \ln^2 x$$

$$f'(x) = 2 + \ln^2 x + x \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \quad \text{منه}$$

$$= \ln^2 x + 2 \ln x + 2$$

$$= (\ln x + 1)^2 + 1$$

إذن  $\forall x \in ]0, +\infty[ \quad f'(x) > 0$   
 ومنه  $f$  تزايدية قطعاً على  $]0, +\infty[$   
 وبما أن  $f$  فردية فإنها تزايدية قطعاً على  $]-\infty, 0[$

### ب- دراسة تقعر (4)

الدالة  $f'$  قابلة للاشتقاق على  $]0, +\infty[$

ليكن  $x$  عنصراً من  $]0, +\infty[$

لدينا  $f'(x) = \ln^2 x + 2 \ln x + 2$

ومنه  $f''(x) = \frac{2 \ln x}{x} + \frac{2}{x}$

$$= \frac{2}{x} (\ln x + 1)$$

إذن  $f''(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 > 0$

$$\Leftrightarrow \ln x > \ln e^{-1}$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{1}{e}$$

وبالمثل لدينا  $f''(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{e}$

و  $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$

لدينا  $f''$  قابلة للاشتقاق على  $]-\infty, 0[$

ليكن  $x$  عنصراً من  $]-\infty, 0[$

لدينا  $f(x) = 2x + x \ln^2(-x)$

ومنه  $f'(x) = 2 + \ln^2(-x) + 2 \ln(-x)$

$$= \ln^2(-x) + 2 \ln(-x) + 2$$

إذن  $f''(x) = 2 \frac{\ln(-x)}{x} + \frac{2}{x}$

$$= \frac{2}{x} (\ln(-x) + 1)$$

ومنه  $f''(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(-x) + 1 < 0$

$$\Leftrightarrow \ln(-x) < \ln \frac{1}{e}$$

$$\Leftrightarrow -x < \frac{1}{e}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{e} < x < 0$$

وبالمثل لدينا  $f''(x) < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{e}$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{e}$$

نلخص دراسة إشارة  $f''(x)$  في الجدول التالي مع إعطاء تقعر المنحنى (4).

| $x$              | $-\infty$                 | $-\frac{1}{e}$            | $0$                       | $\frac{1}{e}$             | $+\infty$ |
|------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|-----------|
| $f''(x)$         |                           | -                         | +                         | -                         | +         |
| تقعر المنحنى (4) | موجه نحو الأراتيب السالبة | موجه نحو الأراتيب الموجبة | موجه نحو الأراتيب السالبة | موجه نحو الأراتيب الموجبة |           |

Achamel

### ج- حساب النهاية المطلوبة

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \ln^2 |x|}{x} = +\infty$$

### لتأويل الهندسي

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{دينا}$$

يما أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$  فإن (ع) تقبل فرعاً شلجماً اتجاهه

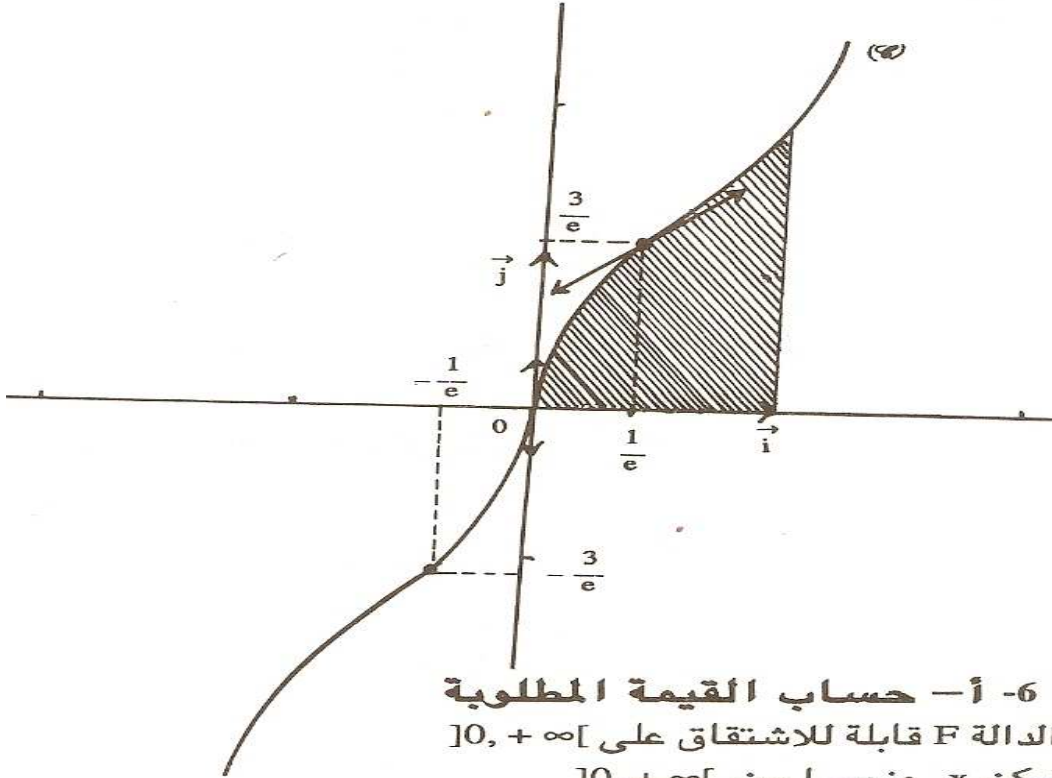
محور الارايب .

### 4- التمثيل المباني

$$\text{دينا} \quad f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{3}{e} \quad \text{و} \quad f'\left(\frac{1}{e}\right) = 1$$

منه معادلة مماس (ع) عند  $A\left(\frac{1}{e}, \frac{3}{e}\right)$  هي  $y = x + \frac{2}{e}$

النقطة  $A\left(\frac{1}{e}, \frac{3}{e}\right)$  هي نقطة انعطاف المنحنى (ع)



### 6- أ- حساب القيمة المطلوبة

الدالة  $F$  قابلة للاشتقاق على  $]0, +\infty[$

ليكن  $x$  عنصراً من  $]0, +\infty[$

$$\text{دينا} \quad F'(x) = x \left( \ln^2 x - \ln x + \frac{5}{2} \right) + \frac{x^2}{2} \left( 2 \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} \right)$$

$$= x \left( \ln^2 x - \ln x + \frac{5}{2} + \ln x - \frac{1}{2} \right)$$

$$= x (\ln^2 x + 2)$$

$$= f(x)$$

### ب- حساب التكامل المطلوب

$$\begin{aligned}
 I_{\lambda} &= \int_{\lambda}^1 f(x) dx && \text{أدينا} \\
 &= \int_{\lambda}^1 F'(x) dx \\
 &= F(1) - F(\lambda) \\
 &= \frac{5}{4} - \frac{\lambda^2}{2} \left( \ln^2 \lambda - \ln \lambda + \frac{5}{2} \right)
 \end{aligned}$$

### ج- حساب المساحة المطلوبة

مساحة السطح المستوي المحصور بين (\*) ومحوري المعلم والمستقيم الذي معادلته  $x = 1$  هي :

$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^1 f(x) dx \\
 &= G(0)
 \end{aligned}$$

$$\forall x \in [0, +\infty[ \quad G(x) = \int_x^1 f(t) dt \quad \text{حيث}$$

بما أن  $G$  قابلة للاشتقاق على  $[0, +\infty[$  فإن  $G$  متصلة في 0 ومنه

$$G(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} G(x)$$

$$A = \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \lambda > 0}} I_{\lambda} \quad \text{إذن}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \lambda > 0}} \left( \frac{5}{4} - \frac{1}{2} (\lambda \ln \lambda)^2 + \frac{\lambda}{2} (\lambda \ln \lambda) + \frac{5}{4} \lambda^2 \right) \\
 &= \frac{5}{4}
 \end{aligned}$$

ومنه فإن مساحة السطح بالسنتيمتر المربع هي :

$$A = \frac{5}{4} \times 4 = 5 \text{ cm}^2$$

Achamel