

1- تحديد المجموعة D_{f_k}

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$

$$x \in D_{f_k} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x} > 0 \quad \text{و} \quad x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{x} > 0 \quad \text{و} \quad x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$$

$$D_{f_k} =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[\quad \text{إذن}$$

2- النقطة A_k مركز تماثل للمنحنى (C_k)

لتكن $M(x, y)$ نقطة من (C_k) ($y = f_k(x)$)

و $M'(x', y')$ صورتها بالتماثل المركزي الذي مركزه A_k

$$\overrightarrow{A_k M} = - \overrightarrow{A_k M'} \quad \text{لدينا}$$

$$\begin{cases} x - \frac{1}{2} = - \left(x' - \frac{1}{2} \right) \\ y - \frac{k}{2} = - \left(y' - \frac{k}{2} \right) \end{cases} \quad \text{ومنه}$$

$$\begin{cases} x' = 1 - x \\ y' = k - y \end{cases} \quad \text{أي}$$

$$y = f_k(x) \quad \text{وبما أن}$$

$$y' = k - y \quad \text{فإن}$$

$$= k - \left(kx - \ln \left(1 - \frac{1}{x} \right) \right)$$

$$= k(1 - x) + \ln \left(\frac{x-1}{x} \right)$$

$$= kx' + \ln \left(\frac{-x'}{1-x'} \right)$$

$$= kx' - \ln \left(\frac{x'-1}{x'} \right)$$

$$= f_k(x')$$

ومنه M' تنتمي إلى (C_k)

إذن A_k مركز تماثل المنحنى (C_k)

3- مقارب المنحنى (C_k)

$$\forall x \in D_{f_k} \quad f(x) - kx = -\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) \quad \text{لدينا}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1 \quad \text{بما أن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = 0 \quad \text{فإن}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx) = 0$$

إذن المستقيم D_k الذي معادلته $y = kx$ هو المقارب للمنحنى (C_k) بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

4- دراسة الدالة $f_{1/2}$

$$\forall x \in D_{f_{1/2}} \quad f_{1/2}(x) = \frac{1}{2}x - \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) \quad \text{لدينا .}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) = 0 \quad \text{بما أن}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_{1/2}(x) = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f_{1/2}(x) = +\infty \quad \text{فإن}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) = +\infty \quad \text{ومنه} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = +\infty \quad \text{لدينا .}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f_{1/2}(x) = -\infty \quad \text{فإن} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{2}x = 0 \quad \text{وبما أن}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} 1 - \frac{1}{x} = 0 \quad \text{لدينا .}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f_{1/2}(x) = -\infty \quad \text{ومنه}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f_{1/2}(x) = +\infty \quad \text{إذن}$$

. الدالة $f_{1/2}$ قابلة للاشتقاق على $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$

ليكن x عنصرا من $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$

$$f'_{1/2}(x) = \frac{1}{2} - \left(+\frac{1}{x^2}\right) \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} \quad \text{لدينا}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2} \cdot \frac{x}{x-1}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{x(x-1)}$$

$$= \frac{x^2 - x - 2}{2x(x-1)}$$

$$= \frac{(x+1)(x-2)}{2x(x-1)}$$

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $(x+1)(x-2)$

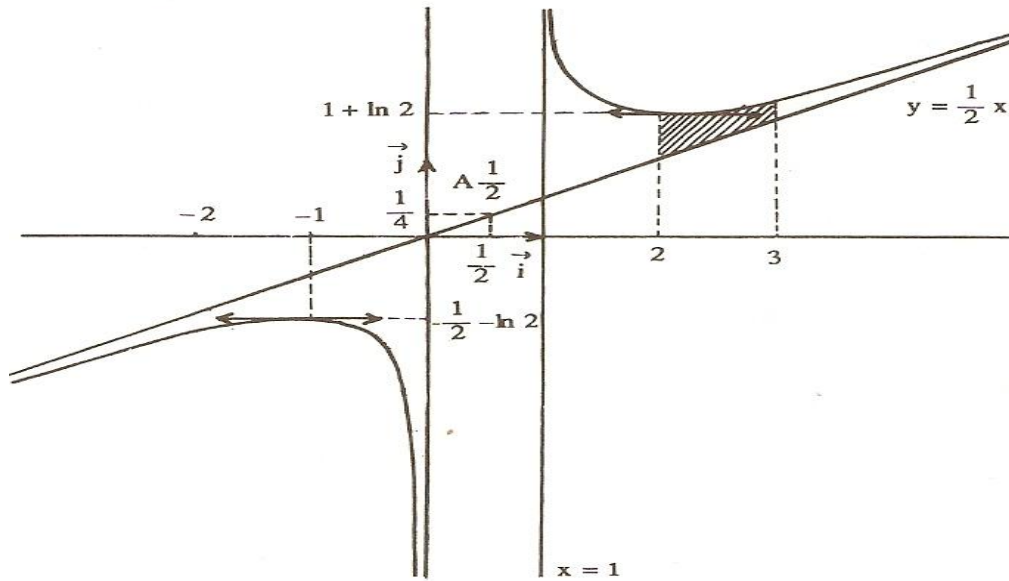
حيث x عنصر من $D_{f_{1/2}}$.

www.Achamel.net

cours pratiques en ligne

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$	
f'(x)	+	0	-		-	0	+
f(x)	$-\infty$	$-\frac{1}{2} - \ln 2$	$-\infty$		$+\infty$	$1 + \ln 2$	$+\infty$

:- انشاء $(C_{1/2})$



6- حساب المساحة المطلوبة

مساحة الحيز المقترح هي :

$$A = \int_2^3 \left(f_1(x) - \frac{1}{2}x \right) dx$$

$$\forall x \in [2, 3] \quad f_1(x) - \frac{1}{2}x > 0 \quad \text{علما أن}$$

$$\forall x \in [2, 3] \quad 1 - \frac{1}{x} < 1 \quad \text{لأن}$$

$$A = - \int_2^3 \ln \left(1 - \frac{1}{x} \right) dx \quad \text{ومنه}$$

$$= - \left(\left[x \ln \left(1 - \frac{1}{x} \right) \right]_2^3 - \int_2^3 x \cdot \frac{1}{x(x-1)} dx \right)$$

$$\begin{aligned} &= - \left(3 \ln \left(\frac{2}{3} \right) - 2 \ln \left(\frac{1}{2} \right) - [\ln(x-1)]_2^3 \right) \\ &= 3 \ln 3 - 5 \ln 2 + \ln 2 \\ &= 3 \ln 3 - 4 \ln 2 \end{aligned}$$
