

1- a- حل المعادلة $(E_1) : \ln\left(\frac{1}{x+1}\right) + \ln(x+2) = 1$

مجموعة تعريف المعادلة (E_1) هي :

$$\begin{aligned} D_1 &= \{x \in \mathbb{R} / x+1 > 0 \text{ و } x+2 > 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / x > -1 \text{ و } x > -2\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / x > -1\} \end{aligned}$$

إذن $D_1 =]-1, +\infty[$

ولكل x من D_1 :

$$(E_1) \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{x+1}(x+2)\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \ln \frac{x+2}{x+1} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+2}{x+1} = e$$

$$\Leftrightarrow x+2 = ex+e$$

$$\Leftrightarrow x(1-e) = e-2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{e-2}{1-e}$$

هل العدد $\frac{e-2}{1-e}$ أكبر قطعاً من -1 ؟

$$\begin{aligned} \frac{e-2}{1-e} - (-1) &= \frac{e-2}{1-e} + 1 = \frac{e-2+1-e}{1-e} \\ &= \frac{-1}{1-e} = \frac{1}{e-1} \end{aligned} \quad \text{لدينا}$$

وبما أن $\frac{1}{e-1} > 0$ فإن $\frac{e-2}{1-e} - (-1) > 0$

ومنه $\frac{e-2}{1-e} > -1$ وبالتالي $\frac{e-2}{1-e} \in D_1$

إذن مجموعة حلول المعادلة (E_1) هي $\left\{\frac{e-2}{1-e}\right\}$

b- حل المعادلة $(E_2) : \ln^2 x + \ln x - 6 = 0$

مجموعة تعريف المعادلة (E_2) هي : $D_2 =]0, +\infty[$

ممیز الحدودية $t^2 + t - 6$ هو $\Delta = 1 + 24 = 25$

إذن جذراها هما $\frac{-1+5}{2} = 2$ و $\frac{-1-5}{2} = -3$

وبالتالي فكل x من D_2 :

$$(E_2) \Leftrightarrow \ln x = 2 \text{ أو } \ln x = -3$$

$$\Leftrightarrow \ln x = \ln e^2 \text{ أو } \ln x = \ln e^{-3}$$

$$\Leftrightarrow x = e^2 \text{ أو } x = e^{-3} = \frac{1}{e^3}$$

فإن مجموعة حلول المعادلة (E_2) هي : $\left\{e^2, \frac{1}{e^3}\right\}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x^2 + x + 1) - x) \quad \text{حساب -2}$$

لا يمكن حساب هذه النهاية مباشرة (شكل غير محدد $+\infty - \infty$)

لدينا :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x^2 + x + 1) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln \left[x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) \right] - x \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln x^2 + \ln \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) - x \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 \ln x - x + \ln \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(\frac{2 \ln x}{x} - 1 \right) + \ln \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

وبما أن

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = \ln 1 = 0$$

و

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 + x + 1) - x = -\infty$$

فإن

Achamel