

$$(E) : y'' - 2y' + y = x^2 + x + 1$$

(1) لنحل المعادلة التفاضلية : $y'' - 2y' + y = 0$

$$r^2 - 2r + 1 = 0 \quad \text{معادلتها المميزة هي}$$

$$r = 1 \quad \text{حلها المزدوج هو}$$

إذن حلول المعادلة (1) هي الدوال $x \mapsto (\alpha x + \beta) e^x$

$$(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{حيث}$$

$$u(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{نضع (2)}$$

$$u''(x) = 2a \quad \text{و} \quad u'(x) = 2ax + b \quad \text{لدينا}$$

$$(E) \quad u \text{ حل للمعادلة} \Leftrightarrow u''(x) - 2u'(x) + u(x) = x^2 + x + 1$$

$$\Leftrightarrow 2a - 4ax - 2b + ax^2 + bx + c = x^2 + x + 1$$

$$\Leftrightarrow ax^2 + (b - 4a)x + (2a - 2b + c) = x^2 + x + 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b - 4a = 1 \\ 2a - 2b + c = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a = 1 \quad \text{و} \quad b = 5 \quad \text{و} \quad c = -11$$

$$\boxed{u(x) = x^2 + 5x - 11} \quad \text{إذن :}$$

$$(E) \quad f \text{ حل للمعادلة} \Leftrightarrow f''(x) - 2f'(x) + f(x) = x^2 + x + 1$$

$$\Leftrightarrow f''(x) - 2f'(x) + f(x) = u''(x) - 2u'(x) + u(x)$$

$$\Leftrightarrow f''(x) - u''(x) - 2(f'(x) - u'(x)) + f(x) + u(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (f - u)''(x) - 2(f - u)'(x) + (f + u)(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (f - u) \text{ حل للمعادلة (1)}$$

$$\text{ب - } f \text{ حل للمعادلة (E)} \Leftrightarrow (f - u) \text{ حل للمعادلة (1)}$$

إذن مجموعة حلول المعادلة (E) هي الدوال

$$x \mapsto x^2 + 5x - 11 + (\alpha x + \beta) e^x \quad \text{حيث } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

إعداد الأستاذ : عبد اللطيف شهبوني