

$$(1) * \text{ لدينا } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\text{إذن : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x^2} + \ln x \right) = +\infty$$

* لكل x من $]0, +\infty[$:

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2} + \ln x = \frac{x+1+x^2 \ln x}{x^2}$$

$$\text{نعلم أن } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^2 \ln x = 0 \quad \text{إذن } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0$$

$$\text{ومنه } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (x+1+x^2 \ln x) = 1$$

$$\text{كما أن } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^2 = 0^+ \quad \text{وهكذا :}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{(x+1+x^2 \ln x)}{x^2} = +\infty$$

(2) لكل x من $]0, +\infty[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x^2 - 2x(x+1)}{x^4} + \frac{1}{x} \\ &= \frac{x^2 - 2x^2 - 2x + x^3}{x^4} = \frac{x^3 - x^2 - 2x}{x^4} \\ &= \frac{x^2 - x - 2}{x^3} = \frac{(x+1)(x-2)}{x^3} \end{aligned}$$

بما أن $x > 0$ فإن $f'(x)$ و $(x-2)(x+1)$ لهما نفس الإشارة.
من خلال جدول إشارة $(x-2)(x+1)$ على المجال $]0, +\infty[$:

x	0	2	$+\infty$
$(x+1)(x-2)$		— ○ +	

نستنتج جدول تغيرات f :

x	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		— ○ +	
f(x)	$+\infty$	$\frac{3}{4} + \ln 2$	$+\infty$

(3) أ- لكل x من $]0, +\infty[$:

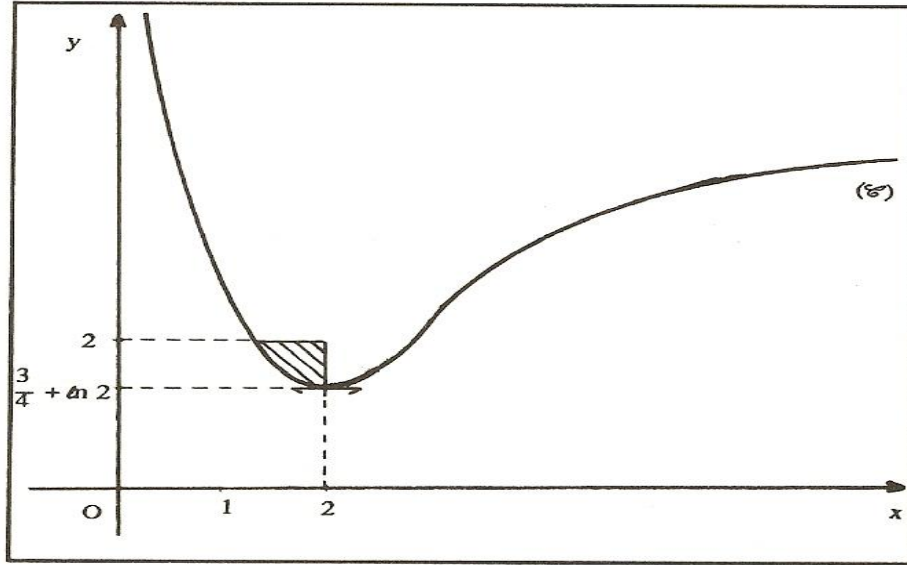
$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x+1}{x^3} + \frac{\ln x}{x}$$

لدينا ؛ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

إذن ؛ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x^3} + \frac{\ln x}{x} \right) = 0$

وهذا يعني أن (س) منحنى الدالة f يقبل اتجاهها مقاربا هو اتجاه محور
الأفصيل.

ب-



(4) نحسب أولاً : $\int_1^2 \ln x \, dx$

نضع : $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = \ln x \end{cases}$

وبالتالي : $\int_1^2 \ln x \, dx = \int_1^2 u'(x) v(x) \, dx$

$$= [u(x) v(x)]_1^2 - \int_1^2 u(x) v'(x) \, dx$$

$$= [x \ln x]_1^2 - \int_1^2 x \cdot \frac{1}{x} \, dx$$

$$= 2 \ln 2 - 1$$

نحسب الآن : $\int_1^2 f(x) \, dx$

$$\int_1^2 f(x) \, dx = \int_1^2 \left(\frac{x+1}{x^2} + \ln x \right) \, dx$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{x} \, dx + \int_1^2 \frac{1}{x^2} \, dx + \int_1^2 \ln x \, dx$$

$$= [\ln x]_1^2 + \left[-\frac{1}{x} \right]_1^2 + 2 \ln 2 - 1$$

$$= \ln 2 - \frac{1}{2} + 1 + 2 \ln 2 - 1$$

$$= 3 \ln 2 - \frac{1}{2}$$

مساحة الحيز Δ هي :

$$S(\Delta) = \left(2 - \int_1^2 f(x) dx \right) \text{cm}^2$$

$$= \left(\frac{5}{2} - 3 \ln 2 \right) \text{cm}^2$$

(5) أ- رأينا أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$

إذن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-f(x)} = 0$ و $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} e^{-f(x)} = 0$

وبالتالي : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ و $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x) = 0 = g(0)$

- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x) = 0 = g(0)$ يعني أن الدالة g متصلة عند النقطة

• $x_0 = 0$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ يعني أن المستقيم ذي المعادلة $y = 0$ مقارب

لمنحنى الدالة g بجوار $+\infty$.

ب- لكل x من $]0, +\infty[$:

$$f(x) + \ln x = \frac{x+1}{x^2} + 2 \ln x = \frac{x+1+2x^2 \ln x}{x^2}$$

لدينا : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^2 \ln x = 0$. إذن : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (x+1+2x^2 \ln x) = 1$

كما أن $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^2 = 0^+$ وبالتالي :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (f(x) + \ln x) = +\infty$$

بما أن $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} e^{-(f(x) + \ln x)} = 0$ فإن $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (f(x) + \ln x) = +\infty$

لكن : $e^{-(f(x) + \ln x)} = e^{-f(x)} \cdot e^{-\ln x}$

$$= e^{-f(x)} \cdot \frac{1}{e^{\ln x}}$$

$$= \frac{e^{-f(x)}}{x}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{2e^{-f(x)}}{x}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{g(x)}{x}$$

$$= \ln 2 - \frac{1}{2} + 1 + 2 \ln 2 - 1$$

$$= 3 \ln 2 - \frac{1}{2}$$

مساحة الحيز Δ هي :

$$S(\Delta) = \left(2 - \int_1^2 f(x) dx \right) \text{cm}^2$$

$$= \left(\frac{5}{2} - 3 \ln 2 \right) \text{cm}^2$$

(5) أ- رأينا أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$

إذن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-f(x)} = 0$ و $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} e^{-f(x)} = 0$

وبالتالي : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ و $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x) = 0 = g(0)$

- يعني أن الدالة g متصلة عند النقطة $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x) = 0 = g(0)$

• $x_0 = 0$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ يعني أن المستقيم ذي المعادلة $y = 0$ مقارب

لمنحنى الدالة g بجوار $+\infty$.

ب- لكل x من $]0, +\infty[$:

$$f(x) + \ln x = \frac{x+1}{x^2} + 2 \ln x = \frac{x+1+2x^2 \ln x}{x^2}$$

لدينا : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^2 \ln x = 0$. إذن : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (x+1+2x^2 \ln x) = 1$

كما أن $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^2 = 0^+$ وبالتالي :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (f(x) + \ln x) = +\infty$$

بما أن $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} e^{-(f(x) + \ln x)} = 0$ فإن $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (f(x) + \ln x) = +\infty$

لكن : $e^{-(f(x) + \ln x)} = e^{-f(x)} \cdot e^{-\ln x}$

$$= e^{-f(x)} \cdot \frac{1}{e^{\ln x}}$$

$$= \frac{e^{-f(x)}}{x}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{2e^{-f(x)}}{x}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{g(x)}{x}$$

إذن $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{g(x)}{x} = 0$. وبالتالي : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = 0$

النهاية $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = 0$ تكتب كذلك على الشكل :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{g(x)}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0}$$

لأن $g(0) = 0$.

وهذه النتيجة تعني أن g قابلة للإشفاق على اليمين عند النقطة صفر.
ج- لكل x من $]0, +\infty[$:

$$g'(x) = -2 f'(x) e^{-f(x)}$$

إذن $f'(x)$ و $g'(x)$ لهما إشارتين مختلفتين على المجال $]0, +\infty[$.
ومنه جدول تغيرات g :

x	0	2	$+\infty$
$g'(x)$		+	—
$g(x)$	0	$e^{-\frac{3}{4}}$	0