

A-1- دراسة تغيرات u :

. u معرفة على IR

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + x e^x - e^x) = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty.$$

. الدالة u قابلة للاشتقاق على IR.

ليكن x عنصرا من IR

$$\begin{aligned} \text{لدينا} \quad u'(x) &= e^x + e^x (x - 1) \\ &= x e^x \end{aligned}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
u'(x)	-	0	+
u(x)	1	0	$+\infty$

2- اشارة u(x) :

حسب منحنى تغيرات الدالة u يكون لدينا $u(x) > 0$ لكل x من

$$u(0) = 0 \quad \text{و} \quad \mathbb{R}^*$$

B-1- التحقق من المتساوية

الدالة f قابلة للاشتقاق على IR

ليكن x عنصرا من IR

$$\text{لدينا: } f(x) = (x - 2)(1 + e^x)$$

$$\begin{aligned} \text{ومنه} \quad f'(x) &= 1 + e^x + (x - 2)e^x \\ &= 1 + x e^x - e^x \\ &= 1 + (x - 1)e^x \end{aligned}$$

$$\text{إذن} \quad f'(x) = u(x)$$

2- . نهايتا الدالة f :

$$\text{لدينا} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + e^x) = +\infty \quad \text{لأن}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{ولدينا}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 2) = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + e^x) = 1 \quad \text{لأن}$$

. تغيرات f :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = u(x) \quad \text{لدينا}$$

$$\text{وبما أن} \quad u(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^* \quad \text{و} \quad u(0) = 0 \quad \text{فإن}$$

$$f'(0) = 0 \quad \text{و} \quad \forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) > 0$$

إذن f تزايدية قطعاً على IR .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'(x)		0	
f(x)	$-\infty$	4	$+\infty$

3- أ- تقعر $\mathcal{C}$:

. الدالة f' قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$

لدينا $f'(x) = u(x)$

ومنه $f''(x) = u'(x)$

وحسب الجزء A السؤال الأول منه يكون لدينا $f''(x) = x e^x$

ومنه $\forall x \in]0, +\infty[\quad f''(x) > 0$

$\forall x \in]-\infty, 0[\quad f''(x) < 0$

$f''(0) = 0$

إذن في المجال $] -\infty, 0[$ تقعر $\mathcal{C}$ موجه نحو الأرتيب السالبة .

وفي المجال $]0, +\infty[$ تقعر $\mathcal{C}$ موجه نحو الأرتيب الموجبة .

و $\mathcal{C}$ يقبل نقطة انعطاف أفصولها 0 وارتوبها -4 .

ب- الفرعان اللانهائيان للمنحنى $\mathcal{C}$:

. لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-2}{x} \right) (1 + e^x) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{x} \right) (1 + e^x) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

إذن $\mathcal{C}$ يقبل فرعاً شلجماً اتجاهه محور الأرتيب عند $+\infty$

. لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

كما لدينا $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = (x-2)e^x + (x-2)$

أي : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) - (x-2) = x e^x - 2 e^x$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (x-2)) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x e^x - 2 e^x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2 \cdot e^x) = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

إذن $\mathcal{C}$ يقبل مستقيماً مقارباً معادلته $y = x - 2$ عند $-\infty$.

ج- الوضع النسبي للمنحنى $\mathcal{C}$ والمستقيم D :

ليكن x عنصراً من $\mathbb{R}^-$.

لدينا $f(x) - (x-2) = (x-2) e^x$

ومنه $x \leq 0 \quad f(x) - (x-2) < 0$ لكل

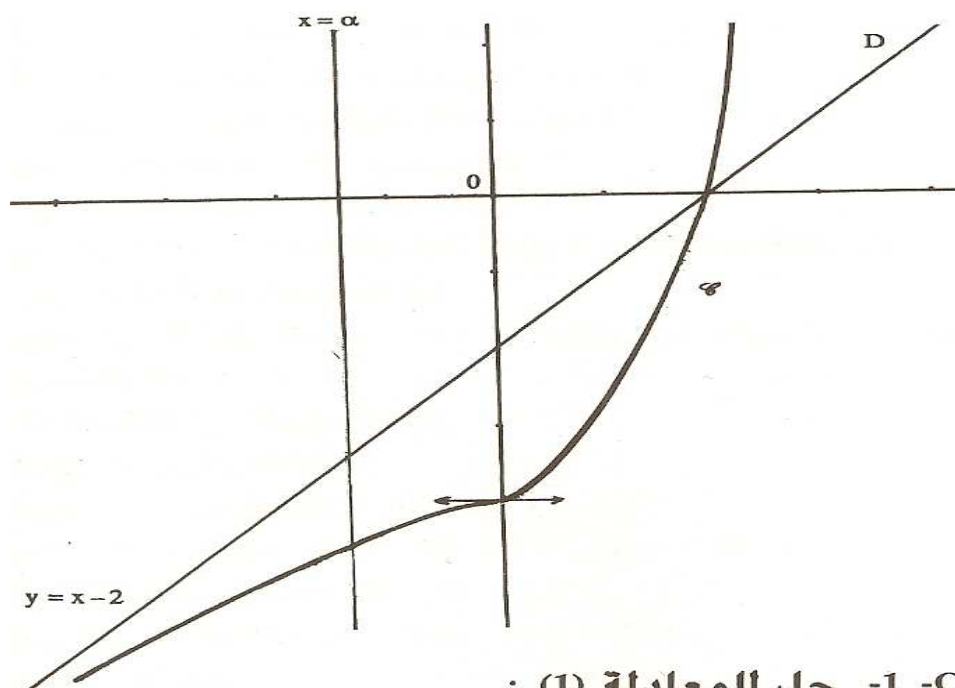
إذن $\mathcal{C}$ يوجد تحت المستقيم D .

د- رسم المنحنى $\mathcal{C}$.



والمطالعة مع الشامل

www.achamel.info
www.Achamel.net
www.Achamel.org
www.Achamel.ma



C-1- حل للمعادلة (1) :

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$.

لدينا : $f(x) = (x-2)(1+e^x)$

$$f'(x) = 1 + (x-1)e^x$$

$$\text{ومنه } f'(x) - f(x) = 1 + x e^x - e^x - x - x e^x + 2 + 2 e^x = e^x - x + 3$$

إذن f حل للمعادلة (1) .

الاستنتاج :

لتكن F دالة أصلية للدالة f . وليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$.

$$\text{لدينا } F'(x) = f(x) \text{ وبما أن } f'(x) - f(x) = e^x - x + 3$$

$$\text{فإن } f'(x) - F'(x) = e^x - x + 3 \text{ أي } (f - F)'(x) = e^x - x + 3$$

ومنه $f - F$ دالة أصلية للدالة $e^x - x + 3$

$$\text{إذن } (\lambda \in \mathbb{R}) \quad (f - F)(x) = e^x - \frac{1}{2} x^2 + 3x + \lambda$$

$$\text{ومنه } F(x) = f(x) - e^x + \frac{1}{2} x^2 - 3x - \lambda$$

$$= \frac{1}{2} x^2 + x e^x - 2x - 3 e^x - 2 - \lambda$$

وبالتالي الدالة $e^x - 2x - 3 e^x + \frac{1}{2} x^2 + x e^x$ هي دالة أصلية للدالة f .

2- اثبات التكافؤ المطلوب :

لتكن الدالة العددية F حلا للمعادلة (1) .

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$.

$$\text{لدينا } F'(x) - F(x) = e^x - x + 3$$

بما أن f حل للمعادلة (1) فإن :

$$F'(x) - F(x) - (f'(x) - f(x)) = 0$$

$$\text{أي } F'(x) - f'(x) - (F(x) - f(x)) = 0$$

$$(F - f)'(x) - (F - f)(x) = 0 \quad \text{أي}$$

إذن $F - f$ حل للمعادلة التفاضلية $y' - y = 0$

. لتكن $F - f$ حلا للمعادلة $y' - y = 0$

$$(F - f)'(x) - (F - f)(x) = 0 \quad \text{لدينا}$$

$$F'(x) - F(x) = f'(x) - f(x) \quad \text{أي}$$

$$F'(x) - F(x) = e^x - x + 3 \quad \text{فإن } f'(x) - f(x) = e^x - x + 3$$

إذن الدالة F حل للمعادلة (1)

وبالتالي F حل للمعادلة (1) إذا وفقط إذا كانت $F - f$ حلا

$$\text{للمعادلة } y' - y = 0$$

3- استنتاج الحل العام :

ليكن F حلا للمعادلة (1).

لدينا $F - f$ حل للمعادلة $y' - y = 0$

$$\lambda \in \mathbb{R} \quad \text{ومنه } \forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) - f(x) = \lambda e^x$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = f(x) + \lambda e^x \quad \text{أي}$$

إذن الحل العام للمعادلة (1) هو $F(x) = (x - 2)(1 + e^x) + \lambda e^x$

حيث $\lambda \in \mathbb{R}$

1-D- حساب المساحة $A(\alpha)$:

$$A(\alpha) = \int_{\alpha}^0 ((x - 2) - f(x)) dx \quad \text{لدينا}$$

$$= - \int_{\alpha}^0 (x - 2)e^x dx$$

$$= - [e^x (x - 2)]_{\alpha}^0 + \int_{\alpha}^0 e^x dx$$

$$\text{إذن } A(\alpha) = (\alpha e^{\alpha} - 3e^{\alpha} + 3)$$

2- حساب النهاية المطلوبة :

$$\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} A(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} (\alpha e^{\alpha} - 3e^{\alpha} + 3) = 3$$