

$$f(z) = z^3 - (16 - i)z^2 + (89 - 16i)z + 89i$$

(1) نفترض أن المعادلة $f(z) = 0$ تقبل حلا تخيليا صرفا α

نضع $\alpha = xi$ حيث $x \in \mathbb{R}$

$$f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow (xi)^3 - (16 - i)(xi)^2 + (89 - 16i)xi + 89i = 0$$

$$\Leftrightarrow -x^3 i + (16 - i)x^2 + 89xi + 16x + 89i = 0$$

$$\Leftrightarrow (16x^2 + 16x) + (-x^3 - x^2 + 89x + 89)i = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16x^2 + 16x = 0 \\ -x^3 - x^2 + 89x + 89 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = -1}$$

$$\boxed{\alpha = -i} \quad \text{إذن :}$$

$$f(z) = (z^3 + iz^2) - (16z^2 + 16iz) + (89z + 89i)$$

$$= z^2(z + i) - 16z(z + i) + 89(z + i)$$

$$= (z + i)(z^2 - 16z + 89)$$

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad f(z) = (z + i)(z^2 - 16z + 89) \quad \text{إذن :}$$

$$z^2 - 16z + 89 = 0 \quad \text{(3) لنحل في } \mathbb{C} \text{ المعادلة :}$$

$$\Delta = 16^2 - 4 \cdot 89$$

$$= -100 = (10i)^2$$

$$z_2 = 8 - 5i \quad ; \quad z_1 = 8 + 5i \quad \text{إذن}$$

إذن مجموعة حلول المعادلة $f(z) = 0$ هي :

$$\boxed{S = \{-i, 8 - 5i, 8 + 5i\}}$$

إعداد الأستاذ : سعيد الهاني