

1- أ- حساب النهايات المطلوبة

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \text{لدينا .}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - e^x) = 1 \quad \text{لدينا .}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \text{لدينا .}$$

ب- قابلية اشتقاق f على اليسار في 0 .

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1 - e^x}{x} \quad \text{لدينا}$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left(-\frac{e^x - 1}{x} \right)$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} -\frac{\exp(x) - \exp(0)}{x - 0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x) - \exp(0)}{x - 0} = \exp'(0) = 1 \quad \text{ونعلم أن}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\exp'(0) \quad \text{إذن}$$

$$= -1$$

أي أن f قابلة للاشتقاق على اليسار في النقطة 0 وأن $f'_e(0) = -1$.

ج - تغيرات الدالة f :

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$.
ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}_+^*$

$$f(x) = \frac{e^x}{x} \quad \text{لدينا}$$

$$f'(x) = \frac{x e^x - e^x}{x^2} \quad \text{ومنه :}$$

$$f'(x) = \frac{(x-1) e^x}{x^2} \quad \text{أي}$$

$$\forall x \in]1, +\infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{إذن}$$

ومنه f تزايدية قطعيا على $]1, +\infty[$

$$\forall x \in]0, 1[\quad f'(x) < 0 \quad \text{و}$$

ومنه f تناقصية قطعيا على $]0, 1[$

. الدالة f قابلة للاشتقاق على $] -\infty, 0[$

ليكن x عنصرا من $] -\infty, 0[$

$$f(x) = 1 - e^x \quad \text{لدينا :}$$

$$f'(x) = -e^x \quad \text{ومنه}$$

$$\forall x \in] -\infty, 0[\quad f'(x) < 0 \quad \text{إذن}$$

ومنه f تناقصية قطعيا على $] -\infty, 0[$.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	-	+
$f(x)$	1	$+\infty$	e	$+\infty$

2- أ - دراسة الفروع اللانهائية :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{لدينا .}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\ln \frac{e^x}{x^2}}}{e^{\ln \frac{e^x}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\ln e^x - \ln x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x - 2 \ln x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \left(1 - \frac{2 \ln x}{x}\right)}$$

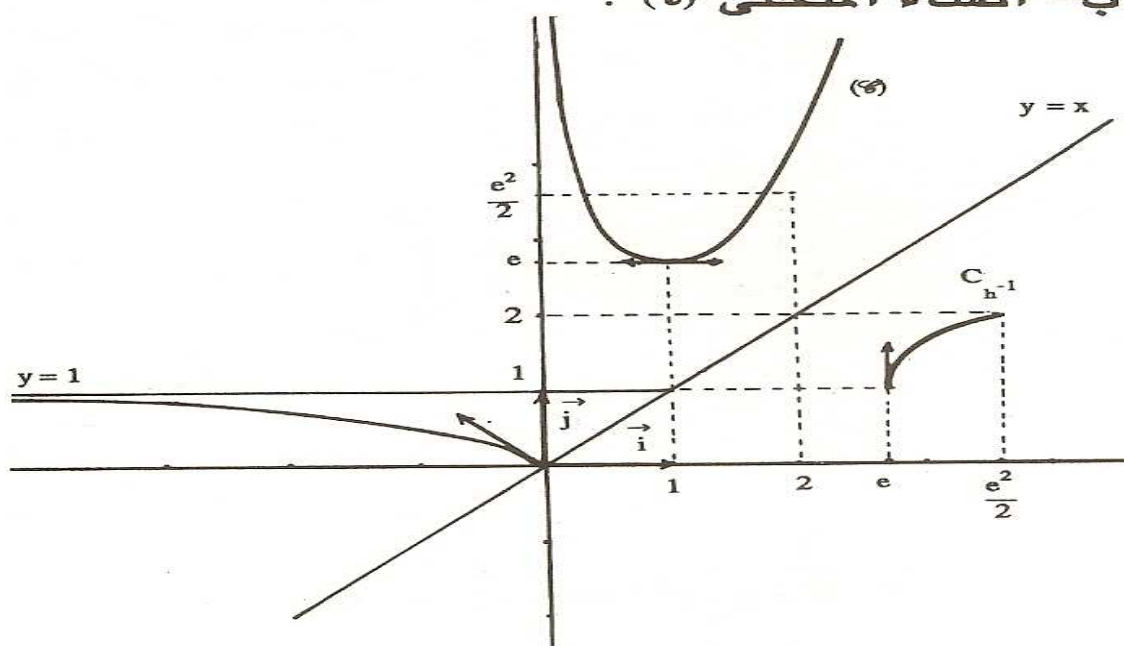
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{2 \ln x}{x}\right) = +\infty \quad \text{فإن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2 \ln x}{x}\right) = 1 \quad \text{وبما أن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \quad \text{إذن}$$

وهذا يعني أن (C) يقبل فرعاً شلجيمياً اتجاهه محور الأرتيب .
لدينا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$

إذن (C) يقبل مستقيماً مقارباً معادلته $y = 1$ عند $-\infty$.
لدينا : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$

إذن (C) يقبل مستقيماً مقارباً معادلته $x = 0$.
ب- انشاء المنحنى (C) :



3- أ- h يقبل تقابلاً عكسياً :

لدينا h متصلة على المجال $[1,2]$ لأن f متصلة على هذا المجال
 h تزايدية قطعاً على المجال $[1,2]$ لأن f تزايدية قطعاً على
هذا المجال

ومنه h تقابل من المجال $[1,2]$ نحو المجال I بحيث :

$$I = [f(1), f(2)] = \left[e, \frac{e^2}{2} \right]$$

إذن h يقبل تقابلاً عكسياً h^{-1} حين تعريفه هو $\left[e, \frac{e^2}{2} \right]$
ب- انشاء منحنى h^{-1}

انظر الشكل السابق

4- أ- اثبات المتساوية المطلوبة :

نعتبر المستوى منسوب للمعلم المتعامد المنظم $(O, \vec{j}, \vec{i})$

معادلة المنحنى (C) في هذا المعلم هي $y = h^{-1}(x)$

المجسم الذي يولده دوران منحنى h حول محور الأرتيب هو

المجسم الذي يولده منحنى الدالة h^{-1} حول المحور $(O, \vec{j})$ الذي

هو محور الأفاصيل بالنسبة للمعلم $(O, \vec{j}, \vec{i})$

$$V = \int_e^{\frac{e^2}{2}} \pi (h^{-1}(x))^2 dx \quad \text{إذن}$$

$$= \pi \int_e^{\frac{e^2}{2}} (h^{-1}(x))^2 dx$$

ب- اثبات النتيجة :

نضع $t = h^{-1}(x)$ ويكون لدينا $x = h(t)$

ومنه $dx = h'(t) dt$

إذا كان $x = e$ فإن $t = 1$

وإذا كان $x = \frac{e^2}{2}$ فإن $t = 2$

$$V = \pi \int_e^{\frac{e^2}{2}} (h^{-1}(x))^2 dx = \int_1^2 t^2 h'(t) dt \quad \text{إذن}$$

ج- حساب V :

$$V = \pi \int_1^2 t^2 h'(t) dt \quad \text{لدينا}$$

$$V = \pi \left([t^2 h(t)]_1^2 - \int_1^2 2t h(t) dt \right) \quad \text{إذن}$$

$$= \pi ([te^t]_1^2 - 2[e^t]_1^2)$$

$$= \pi (2e^2 - e - 2e^2 + 2e)$$

$$V = e\pi$$

أي

تمرن بكل ثقة في موقعك المفضل الشامل
الشامل أول موقع تعليمي مغربي على الأنترنت

الشامل يقدم أفضل طرق المراجعة

