

1- حساب نهايات f عند محددات $\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

• لدينا: $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = \sqrt{1+0} = 1$

ولدينا: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) = +\infty$

إذن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

• لدينا: $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0} (x+1) = 1$

إذن: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$

2-a- حساب $f'(x)$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ ولدينا لكل x من $\mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + (x+1) \frac{\frac{2x}{x^4}}{2\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \\ &= \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - \frac{(x+1)}{x^3 \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \frac{x^3 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - x - 1}{x^3 \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \\ &= \frac{x^3 + x - x - 1}{x^3 \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \frac{x^3 - 1}{x^3 \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \end{aligned}$$

ونعلم أن $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ لكل a و b من $\mathbb{R}$

إذن: $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$

وبالتالي فإن: $f'(x) = \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x^3 \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}$

b- إشارة $f'(x)$

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}^*$

لدينا: $f'(x) = \frac{x-1}{x} \cdot \frac{x^2 + x + 1}{x^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}$

وبما أن: $x^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} > 0$

و $x^2 + x + 1 > 0$ (لأن مميز الحدودية $x^2 + x + 1$ سالب

قطعا ومعامل x^2 في هذه الحدودية موجب)

فإن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $\frac{x-1}{x}$

وبما أن إشارة $\frac{x-1}{x}$ هي إشارة $x(x-1)$
فإن إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}^*$ بالفعل هي إشارة $x(x-1)$

-c جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$x(x-1)$	+	0	-	0	+
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$2\sqrt{2}$	$+\infty$	

3-a- لنبين أن (Δ) مقارب مائل للمنحنى (C)

لدينا: $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) - (x+1) = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} (x+1) \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 1 \right)$

$$= \lim_{|x| \rightarrow +\infty} (x+1) \frac{1 + \frac{1}{x^2} - 1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1}$$

$$= \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)}{x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1} = 0 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

إذن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 1$ هو بالفعل مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $+\infty$ وبجوار $-\infty$

b- الوضع النسبي للمنحنى (C) والمقارب (Δ)

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}^*$

رأينا أن: $f(x) - (x+1) = \frac{x+1}{x^2 \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1 \right)}$

إذن إشارة $f(x) - (x+1)$ هي إشارة $x+1$

ومنه الجدول التالي الذي يعطي إشارة $f(x) - (x+1)$ والوضع النسبي للمنحنى (C) والمستقيم (Δ) :

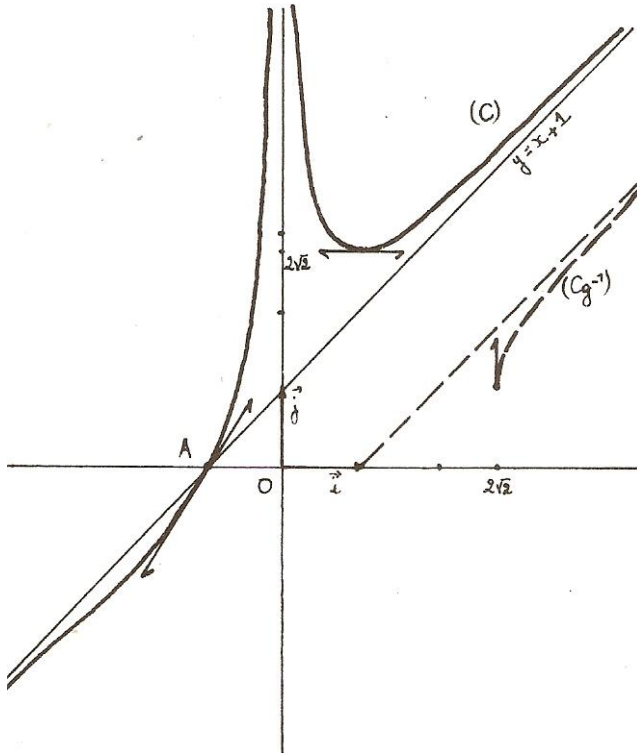
x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f(x) - (x+1)$	-	0	+	+
وضع (C) و (Δ)	تحت (Δ)	يقطع (Δ) في $A(-1, 0)$	فوق (Δ)	فوق (Δ)

c- معادلة لمماس (C) في النقطة A (-1, 0)

معادلة لهذا المماس هي : $y = f'(-1)(x+1) + 0$

أي : $y = \sqrt{2}(x+1)$

-d رسم (C)



-a-4 * تحديد $f(I)$

من جدول تغيرات الدالة f نستنتج أن :

$$f(I) = [2\sqrt{2}, +\infty[$$

* لنبين أن g تقابل

الدالة g متصلة وتزايدية قطعاً على المجال I

إذن g تقابل من I نحو المجال : $f(I) = [2\sqrt{2}, +\infty[$

وبالتالي فهي تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة من $[2\sqrt{2}, +\infty[$

نحو $[1, +\infty[$

-c رسم $(C_{g^{-1}})$

المنحنى $(C_{g^{-1}})$ هو مماثل منحنى f على $[1, +\infty[$ بالنسبة

للمستقيم ذي المعادلة $y = x$ (انظر الشكل أعلاه)