

(1) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x}) = +\infty \quad \text{لدينا :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x}) \quad \text{إذن}$$

$$= +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x + \sqrt{x^2 + 2x} = 0 \quad (2) \quad \text{أ- بما أن}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln(1 + x + \sqrt{x^2 + 2x})}{x + \sqrt{x^2 + 2x}} = 1 \quad \text{فإن :}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln(1 + x + \sqrt{x^2 + 2x})}{x} \quad \text{إذن :}$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x + \sqrt{x^2 + 2x}}{x} \cdot \frac{\ln(1 + x + \sqrt{x^2 + 2x})}{x + \sqrt{x^2 + 2x}}$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x + x \sqrt{1 + \frac{2}{x}}}{x} \cdot \frac{\ln(1 + x + \sqrt{x^2 + 2x})}{x + \sqrt{x^2 + 2x}}$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2}{x}}\right) \cdot \frac{\ln(1 + x + \sqrt{x^2 + 2x})}{x + \sqrt{x^2 + 2x}}$$

$$= +\infty$$

ومنه f غير قابلة للإشتقاق على اليمين في الصفر وهذا يعني هندسياً أن المنحنى (C) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى على اليمين في النقطة $A(0, 0)$

ب- لكل x من $\mathbb{R}^{*+}$:

$$f'(x) = \frac{1 + \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x}}}{x+1+\sqrt{x^2+2x}}$$

$$= \frac{x+1+\sqrt{x^2+2x}}{(x+1+\sqrt{x^2+2x})\sqrt{x^2+2x}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+2x}}$$

نلاحظ أن $f'(x) > 0$ لكل x من $\mathbb{R}^{*+}$
 جدول تغيرات f

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	+
$f(x)$	0	$+\infty$

(3) نحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x}) = +\infty$

و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x})}{x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x}} = 0$

و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x + 1}{x} + \sqrt{1 + \frac{2}{x}} \right) = 2$

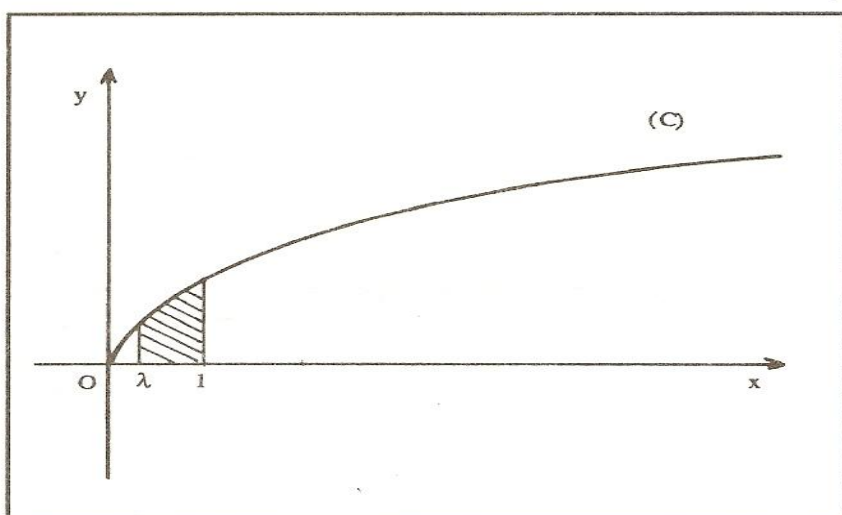
إذن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x})}{x}$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x}}{x} \cdot \frac{\ln(x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x})}{x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x}}$$

$$= 0$$

ومنه المنحنى (C) يقبل اتجاهها مقاربا هو اتجاه محور الأفاصيل.

(4)



(5) بما أن f دالة متصلة و تزايدية قطعاً على المجال $[0, +\infty[$ فإنها

تقابل من $[0, +\infty[$ نحو $J = f([0, +\infty[)$

لدينا $f(0) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$\begin{aligned} J &= f([0, +\infty[) \quad \text{إذن :} \\ &= [f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) [\\ &= [0, +\infty [\end{aligned}$$

. تحديد $f^{-1}(x)$ لكل x من $[0, +\infty [$:

لكل x من $[0, +\infty [$ ولكل y من $[0, +\infty [$:

$$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y)$$

$$\Leftrightarrow x = \ln(y + 1 + \sqrt{y^2 + y})$$

$$\Leftrightarrow y + 1 + \sqrt{y^2 + y} = e^x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y^2 + y} = e^x - (y + 1)$$

$$\Leftrightarrow y^2 + y = (e^x - (y + 1))^2$$

$$\Leftrightarrow y^2 + y = e^{2x} - 2(y + 1)e^x + (y + 1)^2$$

$$\Leftrightarrow y^2 + y = e^{2x} - 2ye^x - 2e^x + y^2 + 2y + 1$$

$$\Leftrightarrow y - 2ye^x = -e^{2x} + 2e^x - 1$$

$$\Leftrightarrow y(1 - 2e^x) = -e^{2x} + 2e^x - 1$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{2e^x - 1}$$

ومنه لكل x من $[0, +\infty [$:

$$f^{-1}(x) = \frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{2e^x - 1}$$

(6) أ- لكل x من $[0, +\infty [\cup]-\infty, -2]$:

$$\begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2x}} &= \frac{x + 1 - 1}{\sqrt{x^2 + 2x}} \\ &= \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x}} \end{aligned}$$

ب- نضع $u(x) = x^2 + 2x$ إذن $u'(x) = 2(x + 1)$

$$I = \int_{\lambda}^1 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2x}} dx \quad \text{ومنه :}$$

$$= \int_{\lambda}^1 \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x}} dx - \int_{\lambda}^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x}} dx$$

$$= \int_{\lambda}^1 \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} dx - \int_{\lambda}^1 \frac{1}{\sqrt{u(x)}} dx$$

$$= [\sqrt{u(x)}]_{\lambda}^1 - [f(x)]_{\lambda}^1$$

$$= [\sqrt{x^2 + 2x}]_{\lambda}^1 - [\ln(x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x})]_{\lambda}^1$$

$$= (\sqrt{3} - \sqrt{\lambda^2 + 2\lambda}) - (\ln(2 + \sqrt{3}) - \ln(\lambda + 1 + \sqrt{\lambda^2 + 2\lambda}))$$

$$= \sqrt{3} - \ln(2 + \sqrt{3}) - \sqrt{\lambda^2 + 2\lambda} + \ln(\lambda + 1 + \sqrt{\lambda^2 + 2\lambda})$$

ج- نضع $v' = 1$ و $u = \ln(x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x})$
 إذن $v = x$ و $u' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x}}$

ومنه :

$$A(\lambda) = \int_{\lambda}^1 f(x) dx$$

$$= [x \ln(x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x})]_{\lambda}^1 - \int_{\lambda}^1 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2x}} dx$$

$$= \ln(2 + \sqrt{3}) - \lambda \ln(\lambda + 1 + \sqrt{\lambda^2 + 2\lambda}) - I$$

$$= \ln(2 + \sqrt{3}) - \lambda \ln(\lambda + 1 + \sqrt{\lambda^2 + 2\lambda}) - \sqrt{3} + \ln(2 + \sqrt{3}) + \sqrt{\lambda^2 + 2\lambda} - \ln(\lambda + 1 + \sqrt{\lambda^2 + 2\lambda})$$

$$= 2 \ln(2 + \sqrt{3}) - \sqrt{3} + \sqrt{\lambda^2 + 2\lambda} - (\lambda + 1) \ln(\lambda + 1 + \sqrt{\lambda^2 + 2\lambda})$$

د- بما أن

$$\lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \lambda > 0}} \sqrt{\lambda^2 + 2\lambda} = 0, \quad \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \lambda > 0}} (\lambda + 1) \ln(\lambda + 1 + \sqrt{\lambda^2 + 2\lambda}) = 0$$

فإن : $\lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \lambda > 0}} A(\lambda) = 2 \ln(2 + \sqrt{3}) - \sqrt{3}$

