

- أ- حساب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

لدينا:
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} (\sqrt{x} - 1) = +\infty$$

و
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

إذن:
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

ولدينا:
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x - \sqrt{x} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

إذن:
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

ب- تحديد الفرعين اللانهائيين

• رأينا أن:
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

إذن المنحنى (C) يقبل مقاربا رأسيا معادلته $x = 0$
أي محور الأرتيب

• لدينا:
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{\sqrt{x}}{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x\sqrt{x}} = 1 - 0 + 0 = 1$$

و
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} = -\infty$$

إذن المنحنى (C) يقبل بجوار $+\infty$ فرعاً شلجيميا اتجاهه المستقيم
ذو المعادلة $y = x$

2- أ- حساب $f'(x)$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^{+*}$ ولدينا لكل x من $\mathbb{R}^{+*}$:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x}}{x}$$

$$= 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} = \frac{2x\sqrt{x} - x - 1}{2x\sqrt{x}}$$

$$\text{وبما أن } (2x + \sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1) = 2x\sqrt{x} - 2x + x - \sqrt{x} + \sqrt{x} - 1 = 2x\sqrt{x} - x - 1$$

$$\text{فإن : } f'(x) = \left(\frac{2x + \sqrt{x} + 1}{2x\sqrt{x}} \right) (\sqrt{x} - 1) \text{ لكل } x \text{ من }]0, +\infty[$$

ب- جدول تغيرات f

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $\sqrt{x} - 1$

ومنه جدول تغيرات الدالة f :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	+
$f(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

3- أ- دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C) و (Δ)

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}^{+*}$

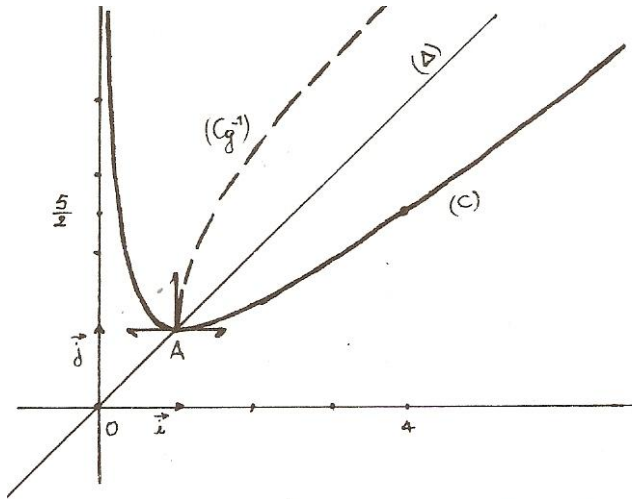
$$\text{لدينا : } f(x) - x = \frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} = \frac{1-x}{\sqrt{x}}$$

إشارة $f(x) - x$ هي إشارة $1 - x$

ومنه الجدول التالي الذي يعطي إشارة $f(x) - x$ والوضع النسبي للمنحنى (C) والمستقيم (Δ) :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x) - x$	+	0	-
وضع (C) و (Δ)	(C) فوق (Δ)	(C) يقطع (Δ) في $A(1, 1)$	(C) تحت (Δ)

ب- رسم (C)



4- أ- لنبين أن g تقبل دالة عكسية g^{-1}

الدالة g متصلة وتزايدية قطعاً على المجال $[1, +\infty[$

إذن فهي تقابل من $[1, +\infty[$ نحو المجال :

$$f([1, +\infty[) = [1, +\infty[$$

وبالتالي فهي تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة من $[1, +\infty[$ نحو

$$[1, +\infty[$$

ومنه فإن : $D_{g^{-1}} = [1, +\infty[$

ب- رسم $(C_{g^{-1}})$

المنحنى $(C_{g^{-1}})$ هو مماثل لمنحنى f على $[1, +\infty[$ بالنسبة للمستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x$ (أنظر الشكل أعلاه)

5- أ- لنبين بالترجع أن $a_n > 1$ لكل n من $\mathbb{N}$

• لدينا : $a_0 = 2$ ، إذن : $a_0 > 1$

وهذا يعني أن الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$

• ليكن n عنصراً من $\mathbb{N}$

لنفترض أن $a_n > 1$ ولنبين أن : $a_{n+1} > 1$

لدينا : $a_n > 1$

و f تزايدية قطعاً على المجال $[1, +\infty[$

إذن : $f(a_n) > f(1)$

أي : $a_{n+1} > 1$

خلاصة : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad a_n > 1$

ب- لنبين أن (a_n) تناقصية

لذلك سنبين بالترجع أن : $a_{n+1} < a_n$ لكل n من $\mathbb{N}$

• لدينا : $a_0 = 2$

$$a_1 = f(a_0) = f(2) = \frac{2\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \quad \text{و}$$

$$a_1 < a_0 : \text{إذن}$$

وهذا يعني أن الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$

• ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}$

لنفترض أن $a_{n+1} < a_n$ ولنبين أن $a_{n+2} < a_{n+1}$

$$a_{n+1} < a_n : \text{لدينا}$$

و f تزايدية قطعاً على المجال $[1, +\infty[$

$$f(a_{n+1}) < f(a_n) : \text{إذن}$$

$$a_{n+2} < a_{n+1} : \text{أي}$$

طريقة ثانية :

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}$

$$a_{n+1} - a_n = f(a_n) - a_n : \text{لدينا}$$

$$= a_n - \sqrt{a_n} + \frac{1}{\sqrt{a_n}} - a_n = \frac{1 - a_n}{\sqrt{a_n}}$$

وبما أن $\sqrt{a_n} > 0$ و $1 - a_n < 0$ (لأن $a_n > 1$)

$$\frac{1 - a_n}{\sqrt{a_n}} < 0 : \text{فإن}$$

وبالتالي فإن المتتالية (a_n) بالفعل تناقصية

جـ - * استنتاج أن (a_n) متقاربة

المتتالية (a_n) تناقصية ومصفورة بالعدد 1 (لأن $a_n > 1$)
لكل n من $\mathbb{N}$

إذن فهي متقاربة

*** تحديد l نهاية المتتالية (a_n)**

الدالة f متصلة على المجال $[1, +\infty[$

إذن النهاية l تحقق : $f(l) = l$

$$\frac{1-l}{\sqrt{l}} = 0 : \text{أي } l - \sqrt{l} + \frac{1}{\sqrt{l}} = l$$

$$l = 1 : \text{أي}$$