

نهايات f عند 1 و عند $+\infty$ وعند $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{(x-1)^2} = +\infty \text{ لدينا .}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty \text{ إذن}$$

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{x}{(x-1)^2} = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 - 2x + 1} \text{ لدينا :}$$

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2}$$

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ إذن :}$$

2 أ- لنبين أن للمنحنى (C) مقاربين

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty \text{ لدينا :}$$

$$x \rightarrow +1$$

إذن المستقيم ذا المعادلة $x=1$ هو مقارب رأسي للمنحنى (C)

$$f(x) = x - \frac{x}{(x-1)^2} \text{ لدينا :}$$

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} -\frac{x}{(x-1)^2} \text{ إذن}$$

$$= 0$$

وبالتالي فإن المستقيم ذا المعادلة $y = x$ هو مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $+\infty$ وبجوار $-\infty$

ب - دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C) ومقاربه $y = x$: (Δ)

$$\text{لكل } x \text{ من } \mathbb{R} - \{1\} \text{ لدينا : } f(x) - x = -\frac{x}{(x-1)^2}$$

إشارة $f(x) - x$ هي إشارة $(-x)$

ومنه الجدول التالي الذي يعطي إشارة $f(x) - x$ والوضع النسبي للمنحنى (C) والمستقيم $y = x$: (Δ)

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f(x) - x$		+	-	-
وضع (C) بالنسبة ل (Δ)	(C) فوق (Δ)	(C) و (Δ) يتقاطعان في $O(0,0)$	(C) تحت (Δ)	(C) تحت (Δ)

3 أ - حساب $f(x)$

الدالة f قابلة للاشتقاق على كل من المجالين $]-\infty, 1[$ و $]1, +\infty[$ لأنها دالة جذرية ولدينا لكل x من $\mathbb{R} - \{1\}$

$$f'(x) = 1 - \frac{(x-1)^2 - 2(x-1)x}{(x-1)^4}$$

$$= 1 - \frac{x-1-2x}{(x-1)^3}$$

$$= \frac{(x-1)^3 + 1 + x}{(x-1)^3}$$

$$= \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 1 + x}{(x-1)^3}$$

$$= \frac{x^3 - 3x^2 + 4x}{(x-1)^3}$$

$$\text{إذن : } (\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}) f'(x) = \frac{x(x^2 - 3x + 4)}{(x-1)^3}$$

ب دراسة إشارة $f'(x)$

لكل x من $\mathbb{R} - \{1\}$ لدينا :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 3x + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ أو } x^2 - 3x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

(مميز المعادلة $x^2 - 3x + 4 = 0$ عدد سالب قطعاً)

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x(x^2 - 3x + 4)}{x-1} > 0 \text{ و}$$

$$\Leftrightarrow x(x-1) > 0 \quad ((\forall x \in \mathbb{R}) x^2 - 4x + 3 > 0 \text{ لأن})$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{x(x^2 - 3x + 4)}{x-1} < 0 \text{ و}$$

$$\Leftrightarrow x(x-1) < 0$$

$$\Leftrightarrow x \in]0, 1[$$

جدول تغيرات f

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	$-\infty$	0	$-\infty$	$+\infty$

4 تقعر (C) ونقطة انعطافه

$$\text{لدينا } (\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}) f''(x) = \frac{-2(x+2)}{(x-1)^4}$$

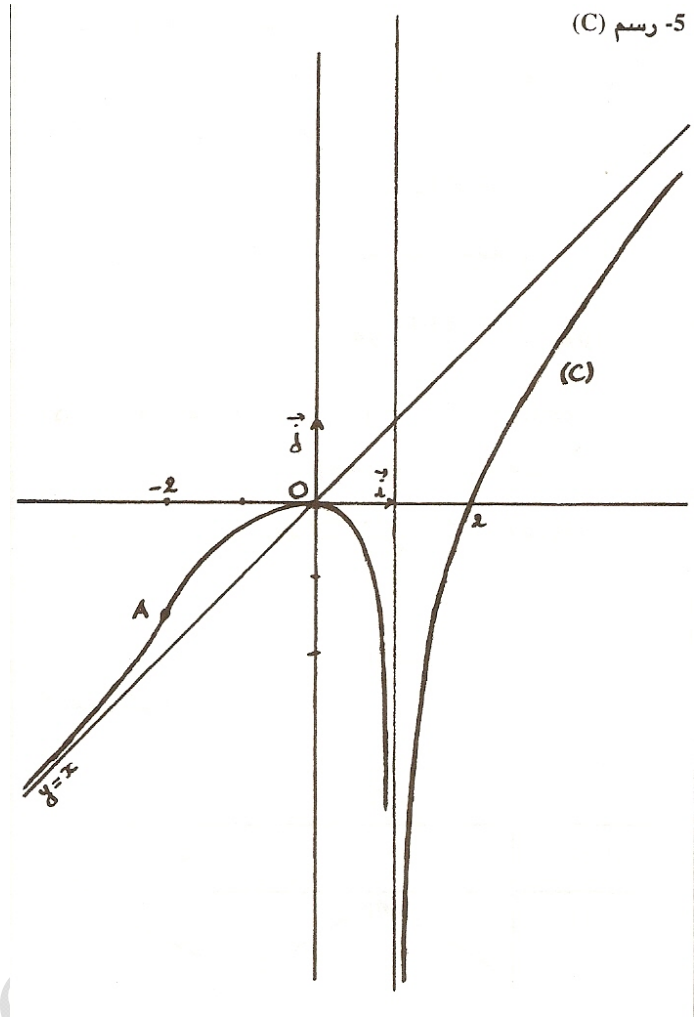
إذن إشارة $f''(x)$ هي إشارة $-(x+2)$

ومنه الجدول التالي يعطي إشارة $f''(x)$ وتقعر المنحنى (C):

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-	-
تقعر (C)	∪	∩	∩	∩

الدالة f'' تتعدم مع تغيير الإشارة في -2

إذن النقطة $A(-2, f(-2))$ أي $A\left(-2, \frac{-16}{9}\right)$ هي نقطة انعطاف المنحنى (C)



6 - أ - لنبين أن g قابلة للاشتقاق في الصفر

لدينا لكل x من $(-1, 1) \setminus \{0\}$:

$$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{|x| - \frac{|x|}{(|x|-1)^2}}{x}$$

$$= \frac{|x|}{x} \left(1 - \frac{1}{(|x|-1)^2} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{1}{(|x|-1)^2} \right) = 0 \text{ وبما أن}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{|x|}{x} = -1 \quad \text{و} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{|x|}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = 0 \quad \text{فإن}$$

وهذا يعني أن g قابلة للاشتقاق في الصفر
ولدينا : $g'(0) = 0$

ب جدول تغيرات الدالة

مجموعة تعريف الدالة g هي : $\mathbb{R} - \{1, -1\}$

والدالة g هي دالة زوجية

يكفي إذن أن ندرس تغيراتها على $\mathbb{R}^+ - \{1\}$

لدينا : $g(x) = f(x)$ لكل x من $\mathbb{R}^+ - \{1\}$

إذن جدول تغيرات g على $\mathbb{R}^+ - \{1\}$ هو جدول تغيرات f على $\mathbb{R}^+ - \{1\}$

وباعتبار أن الدالة g زوجية نحصل على جدول تغيراتها كالتالي :

