

1- حل المعادلة التفاضلية (1):

$$y'' - 2^2 y = 0 \quad \text{المعادلة (1) تكتب على الشكل}$$

إذن حلول المعادلة (1) هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :
 $\beta \in \mathbb{R}$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ حيث $x \mapsto \alpha e^{2x} + \beta e^{-2x}$

2- أ- الدالة g حل للمعادلة (2) :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = -\frac{1}{4} \left(x^2 + 2x + \frac{1}{2} \right) \quad \text{لدينا}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = -\frac{1}{4} (2x + 2) \quad \text{و}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g''(x) = -\frac{1}{2} \quad \text{و}$$

ومنه

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g''(x) - 4g(x) = -\frac{1}{2} - 4 \left(-\frac{1}{4} (x^2 + 2x + \frac{1}{2}) \right)$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g''(x) - 4g(x) = x^2 + 2x \quad \text{أي}$$

إذن g حل للمعادلة التفاضلية (2) .

ب- اثبات التكافؤ المطلوب

. ليكن f حلا للمعادلة التفاضلية (2)

$$\text{لدينا : } x \in \mathbb{R} \quad f''(x) - 4f(x) = x^2 + 2x$$

$$\text{وبما أن } g''(x) - 4g(x) = x^2 + 2x \quad \text{فإن}$$

$$f''(x) - g''(x) - 4(f(x) - g(x)) = 0$$

$$(f''(x) - g''(x)) - 4(f(x) - g(x)) = 0 \quad \text{أي}$$

إذن $f - g$ حل للمعادلة التفاضلية (1).

. ليكن $f - g$ حلا للمعادلة التفاضلية (1) .

$$\text{لدينا } (f''(x) - g''(x)) - 4(f(x) - g(x)) = 0$$

$$f''(x) - 4f(x) = g''(x) - 4g(x) \quad \text{أي}$$

$$\text{وبما أن } g''(x) - 4g(x) = x^2 + 2x \quad \text{فإن}$$

$$f''(x) - 4f(x) = x^2 + 2x$$

إذن f حل للمعادلة (2)

وبالتالي فإن f حل للمعادلة التفاضلية (2) إذا وفقط إذا كان

$f - g$ حلا للمعادلة التفاضلية (1) .

الاستنتاج

ليكن f حلا للمعادلة (2)

لدينا $f - g$ حل للمعادلة (1)

أي أن $f - g$ هي من بين الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بمايلي :

$$\beta \in \mathbb{R} \text{ و } \alpha \in \mathbb{R} \text{ حيث } f(x) - g(x) = \alpha e^{2x} + \beta e^{-2x}$$

وهذا يعني أن حلول المعادلة (2) هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$

$$x \mapsto -\frac{1}{4} \left(x^2 + 2x + \frac{1}{2} \right) + \alpha e^{2x} + \beta e^{-2x} \quad \text{بمايلي :}$$

حيث $\beta \in \mathbb{R}$ و $\alpha \in \mathbb{R}$

Achamel